

UNIVERSIDAD COMPLUTENSE DE MADRID

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

Departamento de Física Teórica I



**CÁLCULOS CON REGULARIZACIÓN DIMENSIONAL
EN TEORÍAS GAUGE QUIRALES ORDINARIAS Y
TEORÍAS GAUGE NO CONMUTATIVAS**

**MEMORIA PRESENTADA PARA OPTAR AL GRADO DE
DOCTOR POR**

Domingo Sánchez Ruiz

Bajo la dirección del Doctor:

Carmelo Pérez Martín

Madrid, 2005

ISBN: 978-84-669-2561-7

© Domingo Sánchez Ruiz, 2004



Universidad Complutense de Madrid
Facultad de Ciencias Físicas

Cálculos con regularización dimensional en teorías gauge quirales ordinarias y teorías gauge no conmutativas

Tesis doctoral
Domingo Sánchez Ruiz
Madrid, 2004

Cálculos con regularización dimensional en teorías gauge quirales ordinarias y teorías gauge no conmutativas

Memoria de Tesis Doctoral presentada por

Domingo Sánchez Ruiz

para optar al grado de Doctor en Ciencias Físicas

Dirigida por

D. Carmelo Pérez Martín

Departamento de Física Teórica I, Univ. Complutense de Madrid

Madrid, 2004

*Una tonelada de ciencia no vale más
que una gota de sabiduría.*
Pitágoras (s. VI a. C.)

*Lista por J. B. S. Haldane de teoremas de
la argumentación científica deficiente:*

1. *De Bellman: “Lo que yo te diga tres veces es verdad”*
Lewiss Carroll, *The hunting of the Snark* (1872)
2. *De la tía Jobiska: “Es un hecho que todo el mundo conoce”*
Edward Lear, *The Pobble who had no toes* (1872)
3. *De Pangloss: “Todo es para lo mejor en el mejor de los mundos posibles”*
Voltaire, *Candide* (1759)

Agradecimientos

En primer lugar, me gustaría expresar mi más profundo agradecimiento a mi director de tesis, D. Carmelo Pérez Martín, por la oportunidad que me ha brindado de poder continuar en el mundo de la física, y en especial, en este fascinante universo de las *Teorías cuánticas de campos*. Su paciencia conmigo ha sido y es impagable.

Extiendo este agradecimiento al Departamento de Física Teórica I de la Universidad Complutense de Madrid por proporcionarme las instalaciones y los recursos necesarios para el desarrollo de esta tesis y a la Consejería de Educación y Cultura de la Junta de Comunidades de Castilla-La Mancha por la ayuda económica recibida durante los primeros años de realización de la presente tesis doctoral.

Quedarán grabados en mi memoria muchos de los momentos vividos junto a todos aquellos compañeros de despacho que he ido teniendo a lo largo de estos últimos años — y han sido unos cuantos (tanto años como compañeros).

Mi curiosidad debe mucho a Jose, Cao y Ramón por aquellas discusiones interminables tratando de comprender los misterios asombrosos que nos descubre la Física, buscando siempre más esa gota pitagórica de sabiduría que la tonelada de ciencia.

Tampoco me olvido de mi familia, en especial, de mis padres, que siempre me animaron a seguir mi carrera por el camino que yo escogiera. Les estaré eternamente agradecido por ello.

Y por último, un especial agradecimiento a Loreto; sin su apoyo y ánimo constante en todas las facetas de mi vida, yo no habría tenido las fuerzas necesarias para llevar a buen fin este proyecto de tesis. Con su presencia, el Universo es algo más interesante que investigar.

A todos ellos, gracias.

Índice

PRÓLOGO	1
 PARTE I: REGULARIZACION DIMENSIONAL EN TEORIAS GAUGE QUIRALES ORDINARIAS	
1. Renormalización algebraica	7
1.1. Teoría de perturbaciones renormalizada	7
1.2. Principios de acción cuántica	9
1.3. Renormalización de las simetrías	10
2. Regularización dimensional	15
2.1. Introducción	15
2.2. Álgebra dimensional BMHV	17
2.3. Renormalización dimensional mínima	22
2.4. Principios de acción cuántica regularizada	25
2.5. Término de ruptura de la simetría BRS	27
2.6. Términos anómalos e identidades de Bonneau	33
2.7. Renormalización algebraica de la simetría BRS	35
3. Modelo Yang-Mills quiral no abeliano	41
3.1. La acción clásica	41
3.2. La acción regularizada dimensionalmente	44
3.3. Los contratérminos singulares a un “loop”	47
3.4. Términos de ruptura de la simetría BRS	49
3.5. Desarrollo de la inserción del operador anómalo	51
3.6. Recuperación de la simetría BRS	57

4. Modelo Higgs-Kibble abeliano quirral	65
4.1. Acción clásica	65
4.2. Renormalización algebraica	67
4.3. Regularización dimensional de la acción	71
4.4. Término de ruptura de la simetría BRS	72
4.4. Recuperación de la simetría BRS	73
5. La ec. del grupo de renormalización	75
5.1. Renormalización algebraica y RGE	75
5.2. Dependencia de la escala en ren. dimensional	78
5.3. RGE en la teoría “gauge” vectorial no abeliana	81
5.4. RGE en la teoría “gauge” quirral no abeliana	88
 PARTE II: REGULARIZACION DIMENSIONAL EN TEORIAS GAUGE SOBRE EL ESPACIO PLANO NO CONMUTATIVO	
1. Teorías de campos sobre espacios no conmutativos	99
1.1. Introducción a la geometría no conmutativa	99
1.2. Espacio-tiempo plano no conmutativo	101
1.3. Teoría perturbativa	103
1.4. El fenómeno de la mezcla UV/IR	108
2. Teoría de Yang-Mills sobre el espacio plano no conmutativo	113
2.1. Acción y reglas de Feynman	113
2.2. La divergencia ultravioleta a un “loop”	117
2.3. La divergencia infrarroja no conmutativa	123
 RESULTADOS Y CONCLUSIONES	 127
 CUESTIONES PENDIENTES	 129
 APÉNDICE A. STI con término de ruptura en reg. dimensional	 131
APÉNDICE B. Diagramas con término de ruptura en Yang Mills quirral	137
APÉNDICE C. Operador lineal de BRS para el modelo abeliano quirral	145
APÉNDICE D. Diagramas a 1 “loop” divergentes en NCYM U(N)	147

APÉNDICE E. Integrales de la divergencia IR en NCYM U(N)	157
ARTÍCULOS PUBLICADOS DEL DOCTORANDO	159
REFERENCIAS.....	161

PRÓLOGO

La *regularización dimensional* es el método más utilizado en la actualidad para obtener resultados finitos en las teorías cuánticas de campos renormalizables. Desde sus orígenes ([1-4], ha resultado ser el método más conveniente por dos razones principales:

- i) Es una regularización que respeta un amplio número de simetrías tanto discretas como continuas, lo que convierte en rigurosas la mayoría de las manipulaciones usuales que se realizan con las integrales asociadas a cada diagrama de Feynman.
- ii) Existen fórmulas analíticas para la mayoría de las integrales que aparecen en los cálculos perturbativos de orden bajo en número de “loops”.

Estas dos características han posibilitado la aparición de diversas técnicas computacionales que han permitido realizar, muchas veces de forma automatizada gracias al cálculo simbólico programado en ordenador, los cálculos teóricos más precisos en teorías cuánticas de campos con contrapartida experimental [5-11].

Pese a que el número de referencias que la han utilizado de una forma u otra es inmenso, la regularización dimensional, todavía hoy en día presenta varias cuestiones de interés, entre las que se encuentran las siguientes que abordaremos en esta tesis:

- i) la sistematización de su aplicabilidad a teorías “gauge” quirales con fermiones de Dirac, es decir, con presencia de la matriz γ_5 en las transformaciones “gauge” de los fermiones, utilizando una matriz γ_5 consistente con la regularización dimensional e intentando mantener la compatibilidad de la teoría renormalizada obtenida con la simetría “gauge” a nivel cuántico
- ii) la realización de cálculos perturbativos en nuevos tipos de modelos de teorías de campos no locales, como es el caso de los proporcionados por las teorías de campos sobre el espacio no conmutativo

Estas dos cuestiones se abordarán en sendas partes de esta tesis.

En la primera parte presentamos cálculos explícitos a un “loop” y el método generalizado en un orden más alto de la aproximación perturbativa para el caso de *teorías “gauge” quirales sobre el espacio-tiempo de Minkowski ordinario* tales que su contenido de materia permita demostrar que la simetría “gauge” no es anómala a nivel cuántico. Nótese

que la dificultad aquí estriba en que la regularización dimensional *rigurosa no preserva* la simetría “gauge” en la teoría regularizada, por lo que la substracción mínima de la acción de partida no conduce a una teoría renormalizada simétrica, aunque sea conocido el hecho de que en este caso existen dichas renormalizaciones simétricas. En la actualidad, para la mayoría de los cálculos del *Modelo estándar* de partículas, se utiliza un esquema de regularización dimensional que no es riguroso y que es posible que no sea adecuado para los cálculos de alta precisión exigidos por los futuros colisionadores de altas energías para discriminar la aparición de nueva física. Aquí en cambio, adoptaremos el esquema de regularización dimensional sistematizado por Breitenlohner y Maison [12-14] que, en especial, utiliza de una matriz γ_5 no anticonmutante en la teoría regularizada.

Para la consecución de los objetivos de esta parte, además, se hará uso de técnicas bien fundamentadas, y que son rigurosas en el marco de este tipo de modelos “gauge” locales, como son los *principios de acción cuántica* y la *renormalización algebraica*.

En la segunda parte, por contra, estudiaremos las divergencias presentes a un “loop” en las teorías “gauge” vectoriales sobre el espacio plano no conmutativo. Al tratarse de modelos de teorías de campos no locales, no queda claro que sigan siendo rigurosos muchos de los resultados generales de la teoría de la renormalización, por lo que los cálculos explícitos directos con métodos de renormalización que respetan el mayor número de simetrías, como la regularización dimensional, pueden aportar valiosa información sobre el problema de determinar si dichas teorías son renormalizables.

Las teorías de campos sobre espacios no conmutativos proporcionan uno de los escenarios sobre los que se han puesto esperanzas de que sirvan para estudiar el problema de la estructura del espacio-tiempo a muy pequeñas escalas. Por tanto, dilucidar la consistencia de la aproximación perturbativa resulta importante para mantener las mencionadas esperanzas, si bien los últimos análisis [15,16] sobre la contrapartida no conmutativa de teorías de interés físico como la electrodinámica cuántica reducen bastante la esperanza de que de estas teorías sobre espacios no conmutativos sean viables desde el punto de vista fenomenológico.

A continuación, hacemos un resumen de lo tratado en cada capítulo de la presente memoria de tesis doctoral.

En el *primer capítulo de la primera parte*, se realiza un breve descripción a modo de recordatorio de la teoría de la renormalización algebraica (y de establecimiento de la notación), ya que en el resto de esta tesis se hará mención a muchos de los conceptos expuestos en este capítulo. Puede verse una exposición más detallada en [17,18].

En el *segundo capítulo* se realiza una presentación de la regularización dimensional desde el punto de vista riguroso y de la teoría de la renormalización algebraica así como de importantes resultados dentro de este marco, como los principios de acción cuántica regularizada y las identidades de Bonneau, necesarios para el adecuado tratamiento de teorías en las que la regularización dimensional no preserva la simetría en cuestión. De este capítulo sólo las secciones 2.5 y 2.7 constituyen una contribución original de los autores de esta tesis.

En el *tercer capítulo* se presenta el primer cálculo que se realizó de forma sistemática y completa de los contratérminos finitos necesarios para recuperar la simetría BRS a un “loop” en una teoría “gauge” quirál en renormalización dimensional, en concreto, un modelo Yang-Mills quirál no abeliano. Para ello se hace uso de las técnicas comentadas en el anterior capítulo. Debido a que el uso de estas técnicas es novedoso se realiza un estudio detallado de ciertos aspectos relacionados con la regularización dimensional con objetos covariantes “anómalos”. Todo lo contenido en este capítulo constituye una contribución original que fue presentada en nuestra segunda publicación [19].

En el *cuarto capítulo* se presenta otro cálculo sistemático de los contratérminos finitos necesarios para recuperar la simetría BRS que hemos realizado. Esta vez, se trata del modelo abeliano con ruptura espontánea de simetría, que implica por tanto, términos de la acción también de dimensión menor que 4. Dentro de la clase de los modelos con ruptura espontánea de simetría, el modelo elegido presenta la ventaja de que es muy sencillo escribir las listas completas de monomios para todos los órdenes y de que todos los campos tienen masa, lo que lo convierte en un candidato ideal para los primeros cálculos prácticos a orden \hbar^2 . Todo lo contenido en este capítulo se encuentra en nuestra cuarta publicación [20].

En el *quinto capítulo y último de la primera parte* se resume el método de renormalización algebraica para obtener la ecuación del grupo de renormalización (RGE) en teorías con simetrías “gauge” y su concreción en regularización dimensional mediante las técnicas desarrolladas por Bonneau, que son de la mayor importancia para el caso de teorías quirales. Se presentan los resultados originales de nuestra segunda publicación [19], en la que se calculaba por primera vez los coeficientes a un “loop” de la ecuación del grupo de renormalización en una teoría “gauge” quirál haciendo uso de dichas técnicas.

En el *primer capítulo de la segunda parte* se realiza una breve introducción de la teoría cuántica de campos sobre el espacio plano no conmutativo, haciendo especial hincapié en las divergencias que aparecen en la teoría perturbativa.

En el *segundo y último capítulo de esta segunda parte* se presentan, como resultados originales de esta tesis, siempre a un “loop” y mediante cálculos explícitos, la divergencia en el ultravioleta de la teoría “gauge” $U(N)$ pura sobre el espacio plano no conmutativo (incluida en nuestra tercera publicación [21], que constituía una generalización de los resultados de nuestra primera publicación [22]), así como la divergencia dominante para ciertos momentos externos pequeños (o límite “infrarrojo no conmutativo”), determinándose que ambas divergencias son compatibles con la simetría “gauge” del modelo.

En el *apéndice A* se presenta la deducción detallada de las ecuaciones centrales para nuestro método sistemático de determinación del término de ruptura de las identidades que representan la simetría BRS en teorías “gauge” quirales.

En el *apéndice B* se representan los diagramas que a un “loop” contribuyen al mencionado término de ruptura en el caso de uno de los modelos quirales estudiados en esta tesis, en concreto el modelo de Yang-Mills quirál. Se presenta además el resultado explícito de la contribución diagrama a diagrama.

Lo expuesto en estos dos primeros apéndices se encuentra, básicamente, dentro de nuestra segunda publicación [19].

En el *apéndice C* se explicita la actuación del operador lineal de BRS sobre los campos del modelo abeliano “gauge” quiral con ruptura espontánea de la simetría estudiado en el cuarto capítulo de la primera parte.

En el *apéndice D* se representan los diagramas que a un “loop” contribuyen a la divergencia ultravioleta de las funciones 1PI en el caso concreto de un modelo de Yang-Mills sobre el espacio-tiempo plano no conmutativo y se presentan los resultados explícitos de dichas contribuciones diagrama a diagrama. Estos resultados, recogidos de nuestra tercera publicación [21] son utilizados en el segundo capítulo de la segunda parte.

En el *apéndice E* se presentan los valores de las integrales necesarias para el cálculo de la divergencia infrarroja no conmutativa de la teoría de Yang-Mills no conmutativa expuesta en el segundo capítulo de la segunda parte.

Por último, se recopilan los *artículos con participación del doctorando*, que contienen resultados incluidos en esta memoria de tesis, y que han sido objeto de publicación en revistas especializadas, así como las *referencias* citadas en esta memoria de tesis por orden de aparición.

NOTA 1: Las ecuaciones que resumen nuestros principales resultados se resaltan entre líneas a lo largo de todo el texto.

NOTA 2: Se ha adoptado el convenio en todos los diagramas representados de considerar siempre todos los momentos salientes.

PARTE I:

*Regularización dimensional
en teorías gauge
quirales ordinarias.*

Capítulo 1.

Renormalización algebraica.

1.1. Teoría de perturbaciones renormalizada

Dada una acción clásica de partida S_{cl} dependiente de forma local de campos cuánticos $\phi^I(x)$ y externos $K_J(x)$ sobre el espacio-tiempo de 4 dimensiones, se descompone dicha acción en una parte libre cuadrática en los campos S_{libre} y otra de interacción S_{int} .

El inverso del núcleo de la parte libre cuadrática da el propagador libre, que junto con el término de interacción permite construir formalmente la teoría perturbativa para las funciones de Green de campos elementales $\phi^{I_1}(x_1) \dots \phi^{I_n}(x_n)$ y/o los operadores compuestos $O_{J_1} \dots O_{J_m}$ gracias a la fórmula de Gell-Mann y Low:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi^{I_1}(x_1) \dots \phi^{I_n}(x_n) O_{J_1} \dots O_{J_m} | 0 \rangle_K \\ = \frac{\langle \phi^{I_1}(x_1) \dots \phi^{I_n}(x_n) O_{J_1} \dots O_{J_m} \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{int}}[\phi_I, K_J] \right\} \rangle_0}{\langle \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{int}}[\phi_I, K_J] \right\} \rangle_0}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

donde $\langle \dots \rangle_0 \equiv {}_0 \langle 0 | T \dots | 0 \rangle_0$ denota el valor esperado en el vacío perturbativo del producto cronológico de Wick de los campos elementales y operadores compuestos que se calcula mediante el teorema de Wick uniendo mediante el propagador libre, por pares y de todas las formas posibles, todos los campos (elementales o contenidos en los operadores compuestos) dentro del producto cronológico T , que se sobreentiende siempre actuando *antes* que la integración temporal de la acción

Definiendo $S_{\text{INT}}[\phi, J_\phi, K] = S_{\text{int}}[\phi, K] + \int J_{\phi^I} \phi^I$, se puede recolectar la serie infinita de funciones de Green de los campos mediante el funcional generador

$$Z[J_\phi, K] = \langle \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}[\phi, J_\phi, K] \right\} \rangle_0. \quad (1.2)$$

Si el campo externo $K^J(x)$ se acopla de forma lineal a un operador $O_J(x)$, este funcional generador también recolecta todas las funciones de Green con una o varias inserciones del

operador $O(x)$:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \phi^{I_1}(x_1) \dots \phi^{I_n}(x_n) O_{J_1}(y_1) \dots O_{J_m}(y_m) | 0 \rangle = \\ = \left(\frac{\hbar}{i} \right)^{(n+m)} \frac{\delta Z[J_\phi, K]}{\delta J_\phi^{I_1}(x_1) \dots \delta J_\phi^{I_n}(x_n) \delta K^{J_1}(y_1) \dots \delta K^{J_m}(y_m)} \Big|_{J=K=0} \end{aligned} \quad (1.3)$$

La definición (1.2) es idéntica a la realizada mediante la integral perturbativa de caminos:

$$Z[J_\phi, K] = \int \mathcal{D}\phi \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} (S_{\text{libre}}[\phi] + S_{\text{INT}}[\phi, J, K]) \right\}. \quad (1.4)$$

A partir de este generador se define el generador de las funciones de Green conexas Z_c por la fórmula $Z = \exp(i/\hbar Z_c)$. Realizando una transformación de Legendre sobre Z_c se llega al funcional generador Γ de las funciones de Green amputadas 1PI (es decir, correspondientes a diagramas conexos aunque se elimine una línea) para las que adoptaremos esta notación en esta tesis:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\Phi_1 \Phi_2 \dots \Phi_n}^{I_1 I_2 \dots I_n} &= \frac{\delta \Gamma}{\delta \Phi_1^{I_1} \delta \Phi_2^{I_2} \dots \delta \Phi_n^{I_n}} \Big|_{\phi=K_\phi=0}, \\ \Gamma_{\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n; s\phi}^{I_1 I_2 \dots I_n I} &= \Gamma_{\phi_1 \phi_2 \dots \phi_n; K_\phi}^{I_1 I_2 \dots I_n I} = \\ &= \frac{\delta \Gamma}{\delta \phi_1^{I_1} \delta \phi_2^{I_2} \dots \delta \phi_n^{I_n} \delta K_\phi^I} \Big|_{\phi=K_\phi=0} = \frac{\delta s\phi^I \cdot \Gamma}{\delta \phi_1^{I_1} \delta \phi_2^{I_2} \dots \delta \phi_n^{I_n}} \Big|_{\phi=K_\phi=0}, \end{aligned} \quad (1.5)$$

donde Φ representa cualquier campo, cuántico o externo, ϕ es cualquier campo cuántico, K_ϕ el campo externo que entra en la acción únicamente por su acoplamiento lineal con la variación $s\phi$ y $s\phi^I \cdot \Gamma$ representa el funcional generador de las funciones de Green amputadas 1PI con una inserción del operador o campo compuesto $s\phi^I$ en todos sus diagramas. Nótese que en el caso de que haya campos anticonmutantes, el orden en la ec. (1.5) es importante.

Si no hay un coeficiente dependiente de \hbar en la acción, los diagramas 1PI generados por la ec. (1.1) con m “loops” serán de orden \hbar^m , por lo que el funcional generador será a la vez una serie formal tanto en los campos como en \hbar .

En general, la fórmula de Gell-Mann y Low dará lugar a diagramas de Feynman cuyas integrales serán divergentes. En teorías con propagadores con masa, sin divergencias en el infrarrojo, estas divergencias, en el ultravioleta, tienen como origen matemático el problema de definir la multiplicación de distribuciones singulares (los propagadores) coincidentes. Imponiendo las hipótesis de causalidad y localidad, este problema se resuelve de forma recursiva módulo ambigüedades locales [17,23], es decir, productos de distribuciones delta de Dirac no coincidentes y sus derivadas en el espacio de configuración, o polinomios en el espacio de momentos. Cada elección de estas ambigüedades constituye una de las posibles renormalizaciones de la teoría en el sentido de Hepp [24]. Estas ambigüedades locales permitidas se fijan con la imposición de condiciones de normalización.

Eligiendo alguna regularización previa consistente, las divergencias en el ultravioleta serán locales y acotadas en su dimensionalidad de masa por el teorema del conteo de potencias (“power counting”) [25-28], que además establece que la integral asociada a un diagrama de Feynman es absolutamente convergente si el “grado superficial de divergencia” (básicamente, la dimensionalidad de masas) de cada uno de sus subdiagramas es negativo.

En las teorías cuya acción sea un polinomio en campos y derivadas cuyos términos tengan todos un factor en campos y derivadas con una dimensionalidad de masas menor o igual que 4, entonces sólo un conjunto finito de funciones de Green tendrá grado superficial de divergencia no negativo y estaremos en el marco de las denominadas “teorías renormalizables por conteo de potencias”. Este conjunto de funciones de Green corresponderá con la ambigüedad en la elección del producto de distribuciones o, lo que es lo mismo, del esquema de renormalización. En las teorías renormalizables por conteo de potencias, por tanto, el número de condiciones de normalización que fijan de forma definitiva el esquema de renormalización será finito para todo orden en \hbar . Por supuesto, la imposición de una cierta condición de simetría entre las funciones de Green renormalizadas de la teoría implica que el número de condiciones de normalización que fijan la ambigüedad remanente es menor.

Hay que resaltar que toda teoría local, es decir polinómica de grado finito en campos y derivadas, no renormalizable por conteo de potencias será renormalizable, si bien la ambigüedad será en principio de grado infinito (¡aunque de grado finito orden a orden en \hbar !). En este caso se suele decir que se trata de “teorías efectivas”.

Es un resultado general independiente del esquema de renormalización elegido para substraer las divergencias el hecho de que una vez obtenido un resultado renormalizado puede obtenerse el resto de los resultados posibles (compatibles con las ambigüedades mencionadas) añadiendo de forma adecuada términos de orden \hbar^m con $m > 0$ a la acción clásica de partida. Denominaremos a estos términos “contratérminos finitos” en contraposición a los “contratérminos infinitos o singulares” inherentes a algunos esquemas de renormalización definidos a partir de una cierta regularización previa de las divergencias.

1.2. Principios de acción cuántica

Las manipulaciones formales habituales que se realizan con la integral de camino (1.4) conducen a identidades formales entre las funciones de Green. Dichas manipulaciones e identidades estarán justificadas sólo dentro de ciertos esquemas de regularización, como es el caso de la regularización dimensional, y de renormalización.

Pero, en general, una renormalización arbitraria de la teoría *no* satisfará identidades obtenidas de esa forma. Lo que puede demostrarse y con todo rigor para cualquier esquema de renormalización válido son los denominados *principios de acción cuántica* (cuyo acrónimo suele ser QAP, del inglés, “quantum action principle”), cuya prueba se dio en primer lugar [29-32] empleando el esquema de renormalización denominado por los acrónimos BPHZ o BPHZL [33-38] (desde el que se pueden alcanzar todas las renormalizaciones válidas mediante la adición de términos locales finitos).

QAP1) las variaciones de cualquier parámetro λ , situado en la parte libre y/o de interacción de la acción implican

$$\frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \lambda} = \Delta_1 \cdot \Gamma_{\text{Ren}} , \quad (1.6)$$

donde $\Delta_1 \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ es la inserción de un operador local de dimensión acotada por conteo de potencias y con las propiedades de simetría correspondientes, tal que, en el orden más bajo en \hbar coincide con $\partial S_{\text{cl}}/\partial \lambda$.

QAP2) las variaciones de campos externos $E(x)$, $\delta E(x)$ implican

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta E(x)} = \Delta_2(x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} , \quad (1.7)$$

donde $\Delta_2(x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ es la inserción de un operador local de dimensión acotada por conteo de potencias y con las propiedades de simetría correspondientes, tal que, en el orden más bajo en \hbar coincide con $\delta S_{\text{cl}}/\delta E(x)$.

QAP3) Variaciones polinómicas arbitrarias de los campos cuánticos $\delta \phi^I$, implican la siguiente identidad

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta K_I(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta \phi^I(x)} = \Delta_3(x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} , \quad (1.8)$$

donde $K_I(x)$ es un campo externo acoplado en la acción a la variación $\delta \phi^I$ y $\Delta_3(x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ es la inserción de un operador local de dimensión acotada por conteo de potencias y con las propiedades de simetría correspondientes. Por supuesto, por tratarse de una inserción, en el orden más bajo en el desarrollo en \hbar es un operador local polinómico en los campos y sus derivadas.

Nótese que el resultado central y relevante para el programa de la renormalización algebraica es el carácter local del orden más bajo en \hbar de la parte derecha de las ecs. (1.6)-(1.8).

1.3. Renormalización de las simetrías

Si la teoría clásica y la teoría cuántica de campos a nivel árbol (“tree level”) de la teoría de perturbaciones (es decir, sin “loops”) tiene una simetría que se considera esencial mantenerla a todo orden en \hbar , entonces, resulta de vital importancia el marco de la renormalización algebraica.

Así por ejemplo, para poder realizar la teoría de perturbaciones covariante Lorentz en el caso de las teorías “gauge”, es necesario aumentar el espacio de Fock con grados de libertad “no físicos”. La nueva acción tiene una nueva simetría asociada a la simetría “gauge” original: la simetría BRS [39-40]. La teoría será renormalizable en el sentido de la sección 1.1, pero queda la importante cuestión de si la matriz de colisión restringida al

espacio de Fock “físico” será unitaria. Este carácter unitario queda garantizado si la teoría cuántica renormalizada satisface las identidades asociadas a la simetría BRS, o identidades de Slavnov-Taylor [41-43], que tienen la forma:

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{ren}}) \equiv \int d^4x (s\varphi) \frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}}{\delta\varphi} + \frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}}{\delta\Phi} = 0, \quad (1.9)$$

donde φ y Φ representan campos que tienen transformaciones BRS, s , lineales o no lineales, respectivamente. K_Φ representa el campo externo acoplado a la transformación BRS no lineal $s\Phi$ en la acción clásica

Por tanto, cuando se dice que una teoría “gauge” es renormalizable se quiere decir además que es posible encontrar una renormalización de la teoría compatible con las identidades de Slavnov-Taylor. Puede ocurrir que se disponga de algún teorema que nos asegure que el esquema de renormalización que estemos empleando respeta la simetría BRS, como es el caso del esquema de substracción mínima (MS) basado en la regularización dimensional en teorías “gauge” vectoriales; pero en general, el funcional 1PI renormalizado no satisfará las identidades de Slavnov-Taylor, sino que habrá un término de ruptura Δ :

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{ren}}) = \Delta. \quad (1.10)$$

Δ es un funcional no local, pero que gracias a los principios de acción cuántica (1.7)-(1.8), tiene que ser la inserción de un operador local integrado de dimensión acotada por conteo de potencias, con número de fantasmas igual a 1 y con la simetrías discretas correspondientes.

Supongamos de forma recursiva que m es el primer orden en el desarrollo en \hbar de Δ . Entonces, por los principios de acción cuántica, las identidades de Slavnov-Taylor a orden \hbar^m son:

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{ren}})^{(m)} = \Delta^{(m)}, \quad (1.11)$$

donde $\Delta^{(m)}$ es un polinomio en los campos y sus derivadas de dimensión acotada, con número de fantasmas igual a uno y con la simetrías discretas correspondientes. Más aún, $\Delta^{(m)}$ satisface una condición de consistencia [44]

$$\mathcal{S}_{\text{cl}} \Delta^{(m)} = 0, \quad (1.12)$$

donde \mathcal{S}_{cl} es el operador lineal de Slavnov-Taylor:

$$b \equiv \mathcal{S}_{\text{cl}} \equiv \int d^4x (s\varphi) \frac{\delta}{\delta\varphi} + \frac{\delta\mathcal{S}_{\text{cl}}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta}{\delta\Phi} + \frac{\delta\mathcal{S}_{\text{cl}}}{\delta\Phi} \frac{\delta}{\delta K_\Phi}, \quad (1.13)$$

que abreviaremos frecuentemente por b para evitar confusiones con la acción y simplificar la notación.

Como b es un operador diferencial funcional nilpotente, la ec. (1.12) define un problema de cohomología en el espacio de funcionales locales acotados por conteo de potencias, con número de fantasmas igual a uno y con las simetrías discretas correspondientes. Utilizando

los potentes resultados de la teoría cohomológica general expuesta en las refs. [18,45-50] se puede encontrar la forma más general de $\Delta^{(m)}$ en cada teoría de forma completa.

Por supuesto que en cada modelo pueden calcularse los diagramas de la teoría y de ahí el lado izquierdo de la ec. (1.11), para obtener la expresión concreta del término de ruptura $\hbar^m \Delta^{(m)}$, pero gracias a la ec. (1.12) se podrá realizar un estudio algebraico que dará la respuesta a la pregunta de si la simetría del modelo es renormalizable o no sin tener que realizar ni un sólo cálculo diagramático.

La solución más general de la ec. (1.12) viene dada por

$$\Delta^{(m)} = \sum_{j \in \mathcal{J}} a_j^{(m)} \mathcal{A}_j + b X^{(m)} \quad (1.14)$$

donde la suma sobre el conjunto \mathcal{J} lo es sobre todos los representantes de las clases de cohomología no trivial en el sector con número de fantasmas igual a 1 y las restricciones dadas por el conteo de potencias y las simetrías discretas. $X^{(m)}$ es un funcional local integrado con número de fantasmas igual a 0 de idénticas restricciones.

Si resulta que o bien el conjunto \mathcal{J} es un conjunto vacío o bien todos los coeficientes $a_j^{(m)}$ resultan ser nulos entonces el modelo de teorías “gauge” en cuestión se dice que está libre de anomalías y las identidades de Slavnov-Taylor pueden recuperarse al orden $\hbar^{(m)}$ sin más que modificar la acción de partida mediante la adición del contratérmino finito $-\hbar^m X^{(m)}$. Entonces se dice que los términos de ruptura $\hbar^m b X^{(m)}$ son anomalías *espurias* [51], en contraposición a los términos proporcionales a \mathcal{A}_j , que constituyen la denominada *anomalía esencial* [52-54].

Nótese que la solución general del problema cohomológico (1.14) sólo depende de las restricciones planteadas por el conteo de potencias y por las simetrías discretas del problema y del operador lineal b concreto del modelo. Es decir, es independiente del orden de la teoría de perturbaciones y permite demostrar si la simetría de una teoría “gauge” es renormalizable sin realizar cálculos explícitos. Basta con estudiar si la cohomología correspondiente es trivial o si no es trivial, si puede demostrarse que sus coeficientes son nulos. En el caso del modelo estándar, \mathcal{J} no es un conjunto vacío, pero por la elección de los números cuánticos los coeficientes de la cohomología no trivial son nulos gracias al fenómeno de “cancelación de la anomalía (esencial)”. Pero en una teoría física como el *Modelo estándar* será necesario conocer con todo detalle los contratérminos $-\hbar^m X^{(m)}$, pues su presencia en la acción influye en los elementos de la matriz de colisión.

Además, dado un $\Delta^{(m)}$ concreto no existe una solución única para $X^{(m)}$, ya que siempre podemos añadir términos L_l simétricos, es decir, en el núcleo de b , a la parte de los contratérminos finitos de la acción: si $X^{(m)}$ es una solución también lo será $X^{(m)} + b \sum_l L_l$ por la nilpotencia de b . A L_l los denominaremos los “invariantes bajo b ” y representan la ambigüedad remanente en la teoría renormalizada incluso tras haber impuesto la simetría BRS. Dicha ambigüedad puede fijarse mediante condiciones de normalización.

Es evidente que hacen falta métodos prácticos para calcular de forma explícita $\Delta^{(m)}$ en teorías como el *Modelo estándar*, para poder obtener así resultados renormalizados rigurosos de las funciones de Green, por si difieren (en algo más que renormalizaciones

finitas) de los obtenidos con la prescripción “ingenua” habitual que comentaremos en el capítulo siguiente.

Recientemente [55-60] se han producido avances en la búsqueda de técnicas prácticas e independientes del esquema de renormalización que implementa el programa de renormalización algebraica, y que en especial asistan en el cálculo de los contratérminos finitos. En esta tesis no se seguirán las técnicas de estas referencias, sino que se hará uso de técnicas específicas del método de la regularización dimensional y que nos permitirán dar expresiones cerradas en términos de diagramas de Feynman para el cálculo del término de ruptura de la simetría BRS.

Capítulo 2.

Regularización dimensional.

2.1. Introducción

La regularización dimensional en teorías de campos fue introducida, parece ser que de forma independiente, en las referencias [1-4] como un método de regularización similar a la regularización analítica [61]. La idea básica consiste en utilizar la dimensión d del espacio como parámetro regulador de las integrales de Feynman, que las convierten en distribuciones meromorfas en d .

En [2] ya se dio la primera construcción rigurosa de la integral en “ d dimensiones” como continuación analítica de las expresiones obtenidas a partir de integrales de dimensión entera mayor que 4 suficientemente alta, y se demostró a uno y dos “loops” cómo de esa continuación al realizar un desarrollo en $d - 4$ se obtiene una parte singular con polos en $d - 4$ cuyos coeficientes son polinomios en los momentos externos. La renormalización se obtendría con la substracción de esta parte singular o divergente y con la reducción a 4 dimensiones de los objetos tensoriales. En esta construcción, por tanto, las cuatro primeras componentes de los índices tensoriales en la teoría regularizada corresponderían con las dimensiones físicas de la teoría renormalizada.

En esa misma referencia también se hizo notar por vez primera como no era posible generalizar a dimensiones distintas de 4 la matriz γ_5 y el pseudotensor completamente antisimétrico $\epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}$ respetando sus propiedades cuatridimensionales. En lugar de esto, los autores de [2] prescribían definir la matriz γ_5 como el producto de $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, es decir, mantener su definición cuatridimensional en d dimensiones. De esta forma obtenían correctamente la anomalía del diagrama triángulo mediante un cálculo explícito.

En [62-64] se trataba el mismo problema y se introdujo como generalización dimensional de la matriz γ_5 , dentro tanto de las variaciones gauge axiales como de la corriente pseudoescalar, el producto completamente antisimetrizado, $\gamma_{[\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4]}$, y como generalización de la divergencia del vector axial, $\partial_{[\mu_1} \bar{\psi} \gamma_{\mu_2} \gamma_{\mu_3} \gamma_{\mu_4]} \psi$. Con estas generalizaciones obtuvieron que la acción de la electrodinámica no es invariante bajo las variaciones gauge axiales sino que aparece un término de ruptura cuya inserción en los

diagramas da cuenta de la anomalía quiral. En [64] además los autores plantean por vez primera cómo estos términos de ruptura en regularización dimensional no sólo generan la auténtica anomalía, denominada *anomalía esencial*, sino otras contribuciones denominadas *espurias* que deben cancelarse mediante subtracciones finitas en la acción de partida para reducir la anomalía obtenida a la deseada anomalía esencial. Además, las contribuciones espurias son debidas a la aparición de términos denominados *evanescentes*. En general, se dirá que un término regularizado es evanescente si la expresión correspondiente en 4 dimensiones es nula.

Breitenlohner y Maison (BM) [12-14] sistematizaron estas prescripciones mediante la introducción axiomática de su conjunto de covariantes y que como ya se comentó en el prólogo, será la formulación de la renormalización dimensional que utilizaremos en esta tesis, ya que es un procedimiento consistente y válido en el sentido de [24] en todos los órdenes en teoría de perturbaciones, incluso con la presencia de γ_5 , en el que herramientas como las ecuaciones de campo, los principios de acción y las identidades asociadas a las simetrías pueden establecerse de forma rigurosa.

Debido a que la sistematización de los objetos covariantes de BM coincide básicamente con la prescripción de 't Hooft y Veltman de [2], se denomina habitualmente este método de regularización dimensional con el acrónimo de BMHV, en contraposición al método habitual de seguir suponiendo [65-68] la anticonmutatividad de γ_5 en regularización dimensional, lo que se suele denominar prescripción “naive” (o “ingenua” en castellano).

Hasta el momento, el esquema BMHV se ha utilizado sobre todo en cálculos con corrientes axiales o quirales [69-85], es decir, en los que los vértices quirales sólo son externos, por ejemplo, para el cálculo, de relevancia experimental, de correcciones radiativas en QCD [75-79], donde siempre hay que tener cuidado de añadir una renormalización finita, si es necesario, a las corrientes axiales para que satisfagan las identidades de Ward correspondientes ; o para la obtención de las anomalías de corrientes [72,74,80,83-85].

En general, en este tipo de cálculos el esquema “naive” puede proporcionar resultados ambiguos si se anticonmuta la matriz γ_5 , ambigüedad que hay que fijar mediante alguna imposición adicional [66,67] o tratar de justificar que no influye de forma incorrecta en el cálculo realizado [68]. Nótese que para el caso simple del estudio a un “loop” de la anomalía del diagrama triángulo con dos corrientes vectoriales y una axial puede obtenerse la conservación de la corriente vectorial y la anomalía de la corriente axial de forma correcta sin conmutar en ningún momento la única matriz γ_5 presente [71,81]. A dos “loops”, en cambio, ya hay que elegir una prescripción para la conmutación de γ_5 [72].

También se han realizado cálculos explícitos en modelos con lagrangianos que incluyen de forma explícita la matriz γ_5 pero donde no es necesario mantener ninguna simetría quiral “gauge” [86-95]. Especialmente resultan interesantes por su relevancia experimental y por la necesidad de tener en cuenta a los operadores evanescentes para llegar a resultados correctos, los cálculos realizados con lagrangianos efectivos de QCD que implican la inserción de un operador quiral de cuatro fermiones [87-94].

En cambio para el *Modelo estándar* manteniendo su simetría quiral “gauge” y los

propagadores virtuales de todos sus bosones asociados en las correcciones radiativas, sólo se ha utilizado el esquema BMHV un pequeño número de veces y de forma parcial [96-100]. Para la gran mayoría de los cálculos de regularización dimensional en el *Modelo estándar* completo, se sigue utilizando el esquema “naive”. La dificultad estriba en que hay que mantener las identidades asociadas a la simetría en una teoría que puede tener γ_5 en cualquier vértice, lo que hace inevitable el cálculo de contratérminos finitos adecuados.

Nótese que en la ref. [97] los autores comprueban de forma explícita a un “loop” cómo dos funciones 1PI calculadas por substracción mínima en el esquema BMHV no satisfacen una identidad de Slavnov-Taylor a menos que se añada un contratérmino finito no presente en el lagrangiano original. Además expresan sus dudas de que exista una forma práctica de calcular esos contratérminos finitos para cualquier grupo de diagramas y orden de la teoría de perturbaciones. Encontrar una de estas formas prácticas será uno de los objetivos de esta tesis.

2.2. Álgebra dimensional BMHV

En su artículo [12], Breitenlohner y Maison definen los objetos “covariantes Lorentz” habituales ($g_{\mu\nu}$, p_μ , γ_μ , etc.) en d dimensiones, siendo d un número complejo, como objetos o símbolos algebraicos que obedecen las identidades algebraicas usuales que se satisfacen en espacios de dimensión entera.

Como existen objetos en 4 dimensiones cuyas propiedades son intrínsecamente cuatridimensionales, además de la métrica “en d dimensiones” $g_{\mu\nu}$, introducen una nueva, $\hat{g}_{\mu\nu}$, que puede considerarse como un objeto “covariante de $(d - 4)$ dimensiones”. La diferencia $g_{\mu\nu} - \hat{g}_{\mu\nu}$ puede considerarse como un objeto “covariante de 4 dimensiones”, si bien aparecerá en expresiones simbólicas correspondientes a una regularización en “ d dimensiones”. Así, el pseudotensor $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$ se considera como un objeto “covariante de 4 dimensiones” (por el axioma de la ec. (2.2) de más abajo).

Se requiere que los símbolos obedezcan (aparte de reglas obvias sobre contracciones de índices, adición, multiplicación por números, conmutación de algunos símbolos, etc.) el siguiente álgebra (BMHV):

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} p_\nu &= p^\mu, & \hat{g}^{\mu\nu} p_\nu &= \hat{p}^\mu, & g^{\mu\nu} \gamma_\nu &= \gamma^\mu, & \hat{g}^{\mu\nu} \gamma_\nu &= \hat{\gamma}^\mu, \\ g_{\mu\nu} g^\nu{}_\rho &= g_{\mu\rho}, & \hat{g}_{\mu\nu} g^\nu{}_\rho &= \hat{g}_{\mu\nu} \hat{g}^\nu{}_\rho = \hat{g}_{\mu\rho}, \\ g^\mu{}_\mu &= d, & \text{Tr } \mathbb{I} &= 4, & \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} &= 2g^{\mu\nu} \mathbb{I}; \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} \epsilon_{\nu_1 \dots \nu_4} = - \sum_{\pi \in S_4} \text{sign } \pi \prod_{i=1}^4 (g_{\mu_i \nu_{\pi(i)}} - \hat{g}_{\mu_i \nu_{\pi(i)}}), \quad (2.2)$$

donde S_4 denota el grupo de permutaciones de 4 objetos, y \mathbb{I} es la unidad del álgebra simbólica de las matrices de Dirac.

Con las definiciones

$$\begin{aligned}\bar{g}^{\mu\nu} &= g^{\mu\nu} - \hat{g}^{\mu\nu}, & \bar{g}^{\mu\nu} p_\nu &= \bar{p}^\mu, & \bar{g}^{\mu\nu} \gamma_\nu &= \bar{\gamma}^\mu, \\ \gamma_5 &= \frac{i}{4!} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_4}\end{aligned}\tag{2.3}$$

y la *hipótesis de la ciclicidad* del símbolo Tr , pueden probarse las siguientes propiedades algebraicas [12]

$$\begin{aligned}\hat{g}_{\mu\nu} \bar{g}^\nu{}_\rho &= 0, & \hat{p} \cdot \bar{q} &= 0, & g_{\mu\nu} \bar{g}^\nu{}_\rho &= \bar{g}_{\mu\rho}, & \hat{g}^\mu{}_\mu &= d - 4, & \bar{g}^\mu{}_\mu &= 4, \\ \{\bar{\gamma}^\mu, \bar{\gamma}^\nu\} &= 2\bar{g}^{\mu\nu} \mathbb{I}, & \{\hat{\gamma}^\mu, \hat{\gamma}^\nu\} &= 2\hat{g}^{\mu\nu} \mathbb{I}, \\ \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} &= \text{sign } \pi \epsilon_{\mu_{\pi(1)} \dots \mu_{\pi(4)}}, \\ \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} \hat{g}^{\mu_i \nu_i} &= 0, & \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} g^{\mu_i \nu_i} &= \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} \bar{g}^{\mu_i \nu_i}; \\ \text{Tr } \gamma^\mu &= \text{Tr } \gamma_5 = 0, & \gamma_5^2 &= \mathbb{I}, \\ \text{Tr } [\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_5] &= \text{Tr } [\bar{\gamma}^\mu \bar{\gamma}^\nu \gamma_5] = \text{Tr } [\hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \gamma_5] = \text{Tr } [\bar{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \gamma_5] = 0, \\ \text{Tr } [\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_4} \gamma_5] &= \text{Tr } [\bar{\gamma}^{\mu_1} \dots \bar{\gamma}^{\mu_4} \gamma_5] = i \text{Tr } \mathbb{I} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4};\end{aligned}\tag{2.4}$$

$$\begin{aligned}\{\gamma_5, \gamma^\mu\} &= \{\gamma_5, \hat{\gamma}^\mu\} = 2\gamma_5 \hat{\gamma}^\mu = 2\hat{\gamma}^\mu \gamma_5, \\ [\gamma_5, \gamma^\mu] &= [\gamma_5, \bar{\gamma}^\mu] = 2\gamma_5 \bar{\gamma}^\mu = -2\bar{\gamma}^\mu \gamma_5, \\ \{\gamma_5, \bar{\gamma}^\mu\} &= [\gamma_5, \hat{\gamma}^\mu] = 0.\end{aligned}\tag{2.5}$$

Además introducimos los proyectores $P_R = 1/2 (1 + \gamma_5)$ y $P_L = 1/2 (1 - \gamma_5)$.

$\bar{g}^{\mu\nu}$ puede verse como el proyector sobre el “espacio de 4 dimensiones” y $\hat{g}^{\mu\nu}$ como el proyector sobre el “espacio de $(d - 4)$ dimensiones”. Nos tomaremos la libertad de decir que los objetos contraídos con una métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$ son objetos “con barra” y los contraídos con $\hat{g}^{\mu\nu}$, objetos “con gorro”. Los objetos y expresiones en d dimensiones del tipo de $g^{\mu\nu}$, γ^μ , p_ν , es decir aquellos en los que no aparece un objeto “con barra” o “con gorro”, diremos a veces que son “normales” (si bien puede ocurrir que un objeto con una expresión “normal”, como $i/6 \epsilon_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}$, pueda transformarse utilizando las reglas del álgebra BMHV en un objeto con una expresión “con barras” y “con gorro”, como $\bar{\gamma}^\mu P_L$ en el ejemplo).

Se dirá que un término u objeto en el álgebra BMHV del espacio de regularización dimensional es *evanescente* si al establecer $d = 4$ y substituir los objetos covariantes “con gorro” por 0, y quizás teniendo en cuenta el álgebra en 4 dimensiones (las ecuaciones correspondientes a (2.1)-(2.5) en 4 dimensiones), la expresión del término pueda hacerse nula. Es decir que serán evanescentes las expresiones cuyas correspondientes en 4 dimensiones son nulas. Nótese que un operador o monomio de campos que incluya algún objeto con gorro o una dependencia explícita en $d - 4$ será evanescente.

Por otro lado, la generalización al espacio de regularización dimensional de una expresión en 4 dimensiones (o lo que es lo mismo, una expresión “regularizada

dimensionalmente”) podrá incluir objetos covariantes “con barra” e incluso “con gorro”. En cualquier caso, denominaremos “estándares” o “no evanescentes” a términos o expresiones regularizadas que, vistas como un todo, sean generalizaciones de expresiones en 4 dimensiones, y que, por tanto, no sean nulas cuando se traduzcan a sus correspondientes en 4 dimensiones. La adición de un término evanescente a uno no evanescente dará lugar a una expresión regularizada no evanescente. Nótese que puede haber expresiones evanescentes formadas a partir de combinaciones lineales de monomios no evanescentes, como por ejemplo, $i/24 \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} \gamma_\mu \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} + i/6 \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}$ (que es igual a $\hat{\gamma}_\mu \gamma_5$).

Todas las fórmulas habituales (que no involucren γ_5) utilizadas para calcular trazas de secuencias de matrices de Dirac en términos de combinaciones de la métrica siguen siendo válidas, incluso cuando las matrices de Dirac llevan “gorro” o “barra”: en estos casos, solamente se tiene que poner los “gorros” o las “barras” sobre las correspondientes métricas. También la traza de un número impar de matrices de Dirac (tanto “normal” como con “gorro” o con “barra”) sigue valiendo cero.

Las secuencias de matrices de Dirac con índices contraídos deben simplificarse con la ayuda de fórmulas como ésta, derivables por métodos exclusivamente algebraicos a partir de los axiomas:

$$\begin{aligned} \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu &= (2 - d) \gamma^\nu, \\ \bar{\gamma}^\mu \bar{\gamma}^\nu \bar{\gamma}_\mu &= -2 \bar{\gamma}^\nu, & \bar{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \bar{\gamma}_\mu &= -4 \hat{\gamma}^\nu, \\ \hat{\gamma}^\mu \hat{\gamma}^\nu \hat{\gamma}_\mu &= (6 - d) \hat{\gamma}^\nu, & \hat{\gamma}^\mu \bar{\gamma}^\nu \hat{\gamma}_\mu &= (4 - d) \bar{\gamma}^\nu. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Nótese cómo sólo las fórmulas con contracciones de objetos “normales” o “con gorro” introducen una dependencia en el regulador d . En cambio las fórmulas con una contracción de objetos “con barra” no introducen dependencia explícita en d .

Por supuesto, cuando γ_5 o el pseudotensor $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$ están presentes en la teoría, la situación cobra interés. En la prescripción “naive” o “ingenua”, se asume la *anticonmutatividad* de γ_5 incluso en el “espacio de d dimensiones”: $\{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0$, y la *ciclicidad* de la traza. A partir de las hipótesis de la prescripción ingenua, y por métodos exclusivamente algebraicos, se obtiene [12,101,51,102]

$$\begin{aligned} 2d \operatorname{Tr}[\gamma_5] &= 0, \\ 2(d - 2) \operatorname{Tr}[\gamma_{\mu_1} \gamma_{\mu_2} \gamma_5] &= 0 & \text{si } d \neq 0, \\ 2(d - 4) \operatorname{Tr}[\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4} \gamma_5] &= 0 & \text{si } d \neq 0, 2; \end{aligned} \quad (2.7)$$

que tiene como consecuencia que $\operatorname{Tr}[\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_4} \gamma_5]$ debe valer, por consistencia y de forma idéntica, 0 en la teoría regularizada dimensionalmente (pues $d \neq 4$ es un número complejo arbitrario, si se quiere, próximo a 4.). Por tanto, también debe anularse en la teoría renormalizada, lo que es incompatible con la propiedad $\operatorname{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_4} \gamma_5] = i \operatorname{Tr} \mathbb{I} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$; cierta en 4 dimensiones (“reales”). Se podría introducir el símbolo ϵ con el requisito de que satisfaga la ec. (2.4), pero entonces el símbolo $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$ sería idénticamente 0. Aunque este problema es conocido, se sigue utilizando la prescripción “naive” en la mayoría de

los cálculos actuales en teorías quirales, por ejemplo en el *Modelo estándar*, sin tomar $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$ como si valiera 0: de hecho, al final de los cálculos se supone que el símbolo $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$ sí tiene su significado habitual no nulo de pseudotensor de Levi-Civita. Esto es una inconsistencia clara matemática (los axiomas no son compatibles) y cuando están presentes inconsistencias matemáticas, los resultados obtenidos a partir de los axiomas son ambiguos y no son fiables.

La ec. (2.7) se obtiene calculando $\text{Tr}[\gamma_{\mu_1} \dots \gamma_{\mu_m} \gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma_5]$ de dos formas diferentes: la primera forma consiste en contraer el índice α sin cruzar la matriz γ_5 y, la segunda, en anticonmutar la matriz γ_α que está más próxima a γ_5 con esta misma matriz γ_5 y se pasa a la izquierda gracias a la ciclicidad de la traza; entonces, se anticonmuta hacia la derecha cruzando el resto de matrices γ hasta que se llegue a la otra γ^α , realizándose ahora la contracción del índice α . Por tanto, para obtener esta inconsistencia, se necesita al menos la traza de seis matrices γ , con dos índices contraídos, y una matriz γ_5 .

La ambigüedad de los resultados en la prescripción “naive” es una consecuencia de la elección en la posición de la γ_5 . Por ejemplo, si no se mueve la matriz γ_5 en ninguna de las dos líneas siguientes,

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_4} \gamma^\alpha \gamma_\alpha \gamma_5] &= d \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_4} \gamma_5], \\ &\neq -\text{Tr}[\gamma_\alpha \gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_4} \gamma^\alpha \gamma_5] = (8 - d) \text{Tr}[\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_4} \gamma_5], \end{aligned} \quad (2.8)$$

a menos que la traza de cuatro matrices γ y una matriz γ_5 (o el pseudotensor totalmente antisimétrico $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$) valga idénticamente 0.

Nótese que la ambigüedad es siempre proporcional a $(d - 4)$ o a un objeto en “ $(d - 4)$ dimensiones” como $\hat{\gamma}_\mu$, pero como los diagramas divergentes tendrán polos en $(d - 4)$, esta ambigüedad podrá hacerse finita en la teoría renormalizada dimensionalmente, incluso ya en los cálculos a un “loop”.

Entonces, ¿por qué se continúa utilizando la prescripción “naive” en los cálculos de teorías quirales como el *Modelo estándar*? El punto clave es que se supone que en las teorías quirales “gauge” las ambigüedades son siempre proporcionales al coeficiente de la anomalía quiral. Por tanto, si esto fuera cierto, podría utilizarse libremente la prescripción “naive” en teorías quirales “gauge” con cancelación de anomalías, como es el caso del *Modelo estándar*. Los cálculos a órdenes bajos en teoría de perturbaciones apoyan esta idea pero no existe por el momento una prueba rigurosa de esta suposición válida a todos los órdenes. (En cualquier caso, parece difícil construir una teoría consistente con elementos inconsistentes).

Nótese que Breitenlohner y Maison introducen los símbolos del espacio de regularización dimensional de forma axiomática. Se ha visto en (2.8) que si al conjunto de axiomas se añade además la anticonmutatividad de la matriz γ_5 , $\{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$ (prescripción “naive”), entonces se obtienen inconsistencias. En (2.3) la matriz γ_5 se define, y sus propiedades de conmutatividad se calculan a partir de los axiomas (2.1)-(2.2), con lo que se evitan de raíz las posibles inconsistencias causadas por estas propiedades; pero, ¿pueden todavía los axiomas (2.1)-(2.2) tener otras inconsistencias entre sí?

Una forma de ver que no es así consiste en construir un modelo del álgebra de símbolos

a partir de objetos matemáticos bien conocidos previamente en el que los axiomas (2.1)-(2.2) sean proposiciones derivadas. Un modelo completo de este tipo es el proporcionado por la construcción de Wilson y Collins [103,102] donde el espacio de “ d dimensiones” es un espacio vectorial de dimensión infinita y las matrices de Dirac se representan por matrices de dimensión infinita. Las métricas $\bar{g}^{\mu\nu}$ y $\hat{g}^{\mu\nu}$ están definidas de forma explícita como proyectores sobre subespacios del espacio base de dimensión infinita. La matriz γ_5 se define por la ec. (2.3), siendo entonces posible derivar las ecs (2.1)-(2.2).

A pesar del valor indudable de esta construcción explícita, aquí no haremos uso de ella, ya que para los cálculos que hemos realizado sólo es necesaria el álgebra abstracta de símbolos BMHV.

Sí que vamos a resaltar que no es necesario aplicar (2.2) para llegar a un resultado final correcto. Si no se utiliza, se llega a una expresión dimensionalmente regularizada para el diagrama en cuestión con una dependencia tensorial más compleja, pero que es válida para tomar como base sobre la que realizar la substracción mínima (ver sección siguiente). Más aún, si no se utiliza y sí en cambio se realizan todas las trazas de matrices y contracciones de índices repetidos de una forma completa, se llega a una expresión regularizada de forma única [12]. En cualquier caso, si se han realizado todas las trazas de matrices y contracciones de índices repetidos, excepto quizás la de los tensores $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$, entonces todas las expresiones regularizadas equivalentes entre sí por manipulaciones algebraicas del resultado del diagrama son igualmente válidas para realizar la substracción mínima. Esto es debido a que la propiedad (2.2) no introduce dependencia adicional en d .

De hecho, en los cálculos prácticos tampoco es necesaria [78-80] la introducción de los símbolos $\hat{g}^{\mu\nu}$ ni $\bar{g}^{\mu\nu}$: basta con elegir vértices para la acción con objetos regularizados “normales”, substituir γ_5 por su definición (2.3) y no utilizar la ec. (2.2) para reducir el producto de dos pseudotensores $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$. Si se realiza todo el resto de contracciones de índices repetidos se llega a una expresión cuyo desarrollo en $d - 4$ y su renormalización por substracción mínima no puede verse afectada por la posterior reducción con los pseudotensores ahora ya cuatridimensionales.

Como veremos más adelante, en la prescripción BMHV y para que la expresión regularizada respete simetrías discretas como la simetría CP, suelen elegirse como regularización del vértice axial $\bar{\gamma}^\mu \gamma_5$ y como regularización del vértice quiral “levógiro” $\bar{\gamma}^\mu P_L$, es decir, objetos covariantes “con barra”. Por las propiedades de los covariantes introducidos arriba, estos vértices son iguales a $i/6 \epsilon_{\mu\mu_1\mu_2\mu_3} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3}$ (el vértice axial de la referencia [62]) y a $P_R \gamma^\mu P_L$ respectivamente, es decir expresiones que también pueden escribirse mediante expresiones regularizadas que sólo implican objetos covariantes “normales”.

Esta forma de proceder, por tanto, tiene la ventaja de no introducir símbolos adicionales en el cálculo, lo que permite utilizar los programas de cálculo simbólico ya desarrollados siempre y cuando la matriz γ_5 se substituya por su definición (2.3) y no se realice ninguna contracción entre pares de pseudotensores $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4}$ más que en las expresiones finales ya renormalizadas.

Pero tiene el inconveniente de que las expresiones adquieren una mayor complejidad

tensorial. Si se introducen los objetos “con barra” y “con gorro” los resultados finales son idénticos para los mismos vértices regularizados de partida, y aunque hay que introducir nuevas reglas en el cálculo simbólico de los programas automatizados, merece la pena, pues las expresiones son más simples ya que involucran a tensores de menor grado y es más sencillo reconocer términos que serán nulos en la expresión renormalizada, como aquellos que impliquen un índice tensorial externo “con gorro” (sus equivalentes en la forma de proceder anterior serían complejas combinaciones de términos con factores $\epsilon_{\nu_1 \dots \nu_4}$ involucrados).

En esta tesis, cuando se necesiten vértices quirales, haremos uso siempre de la prescripción BMHV en su forma que implica el uso de los objetos tipo $\hat{g}^{\mu\nu}$, $\bar{g}^{\mu\nu}$, etc.

2.3. Renormalización dimensional mínima

La renormalización dimensional por substracción mínima o renormalización dimensional mínima o esquema MS puede llevarse a cabo de dos formas rigurosamente equivalentes [12,102-105]:

- a) En la acción regularizada dimensionalmente no se introduce ningún “contratérmino singular” y se aplica el algoritmo de substracción mínima mediante una fórmula de bosques (“forests” en inglés) directamente a cada diagrama 1PI regularizado dimensionalmente. Dicha fórmula aplicada a cada diagrama puede dividirse en dos partes: una substracción de las subdivergencias de todos sus subdiagramas 1PI, que deja una divergencia superficial local con polos en $d - 4$, y una substracción posterior de esa parte polar remanente.
- b) Se va añadiendo de forma recursiva en potencias de \hbar contratérminos singulares o “infinitos” a la acción, elegidos adecuadamente para cancelar la parte divergente del desarrollo en $d - 4$ de las expresiones regularizadas. Para obtener todos los diagramas que contribuyen a una función 1PI de un cierto orden \hbar^m , se han de tener en cuenta todos los contratérminos singulares o “infinitos” calculados previamente en el orden \hbar^r , con $r < m$. La suma de todos esos diagramas será una expresión regularizada cuyos polos en $d - 4$ son locales. Se añade ahora a la acción regularizada dimensionalmente los contratérminos singulares de orden \hbar^m necesarios para cancelar esas divergencias, y así sucesivamente.

Es decir la renormalización definida por a) puede implementarse diagramáticamente mediante la adición de contratérminos singulares a la acción de partida.

En general, procederemos de esta forma:

- i) Escribir una acción clásica de orden cero en \hbar regularizada dimensionalmente, es decir en el espacio de “ d dimensiones”, que denotaremos por $S_0 = S_{0,\text{libre}} + S_{0,\text{int}}$, utilizando como elementos los covariantes de la primera sección, tal que tenga como límite formal $d \rightarrow 4$ la acción en 4 dimensiones de la teoría física de partida. El límite formal, que denotaremos por $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$, consiste en estos pasos: substituir los objetos covariantes “con barra” por objetos “normales”, los objetos covariantes “con gorro”

por 0, interpretar todos los objetos covariantes “normales” como objetos en el espacio de 4 dimensiones y tender la posible dependencia explícita en d a 4. El término libre y cuadrático en los campos cuánticos, $\int d^d x \frac{1}{2} \phi D \phi$, de S_0 debe ser tal que $i\hbar D^{-1}$, el propagador libre, tenga la misma expresión algebraica que en 4 dimensiones, aunque expresada en términos de los covariantes “normales” en “ d dimensiones”. ϕ denota una colección arbitraria de campos bosónicos o fermiónicos.

- ii) Obtener las reglas de Feynman en “ d dimensiones” a partir de la acción clásica regularizada dimensionalmente, S_0 , siguiendo las técnicas formales habituales.
- iii) Con estas reglas de Feynman, construir los diagramas de Feynman correspondientes. Sus integrales asociadas ahora están perfectamente definidas y constituyen la teoría regularizada.
- iv) Introducir el generador funcional regularizado dimensionalmente $Z^{\text{DReg}}[J; K; \lambda]$:

$$\begin{aligned} Z^{\text{DReg}}[J; K; \lambda] &= \int \mathcal{D}\phi \exp\left\{\frac{i}{\hbar} \left(S_0[\phi; K; \lambda] + \int d^d x J_I(x) \phi^I(x) \right)\right\}, \\ &= \left\langle \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{0,\text{INT}}[\phi, J_\phi, K; \lambda]\right\} \right\rangle_0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde el lado derecho de la ec. (2.9) es una serie formal de potencias en \hbar , K y J que genera los diagramas de Feynman del apartado anterior y $S_{0,\text{INT}} = S_{0,\text{int}} + \int d^d x J_I(x) \phi^I$. Es decir, es un desarrollo en funciones de Green y en “loops” (ya que en S_0 no hay contratérminos dependientes de \hbar) cuyos términos dependen exclusivamente de la acción de partida S_0 . Si la acción de partida, dentro de S_{int} , incluyera términos explícitos dependientes de potencias de \hbar , es decir, *contratérminos*, entonces la potencias en \hbar de un diagrama 1PI que contenga un contratérmino como vértice ya no coincidirá con su número de “loops”. Los símbolos K y λ designan, respectivamente, cualquier campo externo, como los que se acoplan de forma lineal a operadores compuestos, y cualquier parámetro que haya en la acción.

- v) Las manipulaciones formales habituales dentro del marco de la integral de camino en teoría de perturbaciones, como las variaciones de los campos y la derivación con respecto a los parámetros, que en 4 dimensiones conducirían a las ecuaciones formales de movimiento, identidades de simetrías y demás, pueden realizarse dentro de la integral de camino de la ec. (2.9), conduciendo entonces a ecuaciones funcionales formales que involucran Z^{DReg} . Estas manipulaciones formales están matemáticamente bien definidas si se expresan en términos de los diagramas regularizados dimensionalmente, y las ecuaciones funcionales formales a las que conducen son matemáticamente rigurosas si se consideran como símbolos que denotan de una forma abreviada la colección infinita de ecuaciones que verifican los correspondientes diagramas de Feynman regularizados dimensionalmente.
- vi) Introducir el funcional 1PI regularizado dimensionalmente, $\Gamma_{\text{DReg}}[\phi; K; \lambda]$, que puede obtenerse a partir de la ec. (2.9) mediante una transformación formal de Legendre, un procedimiento perfectamente definido en términos de diagramas de Feynman regularizados. De nuevo, el principio de acción cuántica regularizado garantiza que las ecuaciones funcionales formales verificadas por $\Gamma_{\text{DReg}}[\phi; K; \lambda]$ tienen sentido

matemáticamente cuando se expresan en términos de diagramas de Feynman regularizados. Nos referiremos por tanto a estas ecuaciones con el calificativo de “regularizadas dimensionalmente”.

- vii) Si la acción de la teoría clásica de partida en 4 dimensiones tiene simetrías que deben mantenerse en la teoría cuántica, entonces también deben generalizarse las correspondientes transformaciones de simetría al “espacio-tiempo de d dimensiones” de la regularización dimensional. Los objetos de este espacio deben estar definidos de acuerdo al álgebra de covariantes de “ d dimensiones” dada en la sección previa. Las transformaciones de campo en “ d dimensiones” deben tender en el límite $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$ hacia las transformaciones clásicas de 4 dimensiones. En general, las transformaciones en “ d dimensiones” no dejarán invariante la acción clásica regularizada dimensionalmente de partida S_0 . Esta falta de invariancia hará que los funcionales generadores de la teoría regularizada, Z_{DReg} y Γ_{DReg} , satisfagan identidades asociadas a la simetría anómalas, que pueden derivarse de forma rigurosa (véase la sección 2.6 y el apéndice A) con las manipulaciones formales habituales de la integral de caminos de la ec. (2.9) gracias a los principios de acción regularizada descritos en la sección siguiente.
- viii) En acuerdo con la ref. [106] y para que los desarrollos de Laurent en $d - 4$ de las expresiones regularizadas sean homogéneas en dimensiones de masas, se introduce la escala de regularización dimensional, μ , reemplazando en la medida del momento de cada integral asociada a un “loop” $\frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ por $\mu^{4-d} \frac{d^d p}{(2\pi)^d}$ antes de aplicar el algoritmo de substracción mínima. Si se sigue el procedimiento de los contratérminos singulares, este reemplazo debe hacerse independientemente de si el diagrama tiene vértices correspondientes a contratérminos singulares o no.
- ix) El algoritmo de substracción mínima de las referencias [12,106], en cualquiera de sus dos formas mencionadas al principio de esta sección, se aplica luego a cada diagrama de Feynman regularizado dimensionalmente. El funcional 1PI mínimamente renormalizado $\Gamma_{\text{Ren}}[\phi; K; \lambda; \mu]$ se obtiene tomando el límite $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$ sobre cada diagrama 1PI substraído.

Una cuestión que surge de forma natural es la de la dependencia de los valores renormalizados de la elección de la generalización al espacio de “ d dimensiones” de la acción, contratérminos finitos y transformaciones de simetría cuatridimensionales. Si la acción de la teoría contiene objetos cuyas propiedades dependen de la dimensión del espacio-tiempo, como por ejemplo la matriz γ_5 , el pseudotensor de Levi-Civita, etc., entonces no existe una acción clásica regularizada dimensionalmente canónica.

En principio, cualquier funcional local que tienda a la acción clásica cuatridimensional en el límite $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$ valdría, siempre y cuando los términos libres de la acción regularizada tengan el mismo propagador. Así, por ejemplo, si se quisiera, podría reemplazarse la métrica y las matrices de Dirac de la parte de interacción por cualquier combinación $g_{\mu\nu} + \kappa_1 \hat{g}_{\mu\nu}$ y $\gamma_\mu + \kappa_2 \hat{\gamma}_\mu$, respectivamente, para tener una familia biparamétrica de acciones regularizadas dimensionalmente perfectamente válidas.

En general, y a cada orden en el desarrollo en \hbar , la diferencia entre dos acciones regularizadas válidas será un operador “evanescente”, es decir un operador cuya expresión

en el nivel árbol tiende a 0 en el límite $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$. Lo mismo pasa para la generalización en el espacio de “ d dimensiones” de los contratérminos finitos o de las transformaciones de simetría.

La ambigüedad en la teoría regularizada en forma de operadores evanescentes de un cierto orden \hbar^n sin embargo sólo tiene consecuencias en la teoría renormalizada al orden \hbar^{n+1} en la forma de una diferencia local correspondiente a una renormalización finita, como queda implícito en las identidades que demostró Bonneau [107] y de las que se hablará en la sección 2.7.

En teorías quirales, la elección de las expresiones regularizadas puede influir bastante en la complejidad de los cálculos, pero en teorías vectoriales como QCD, por supuesto, la elección más conveniente será la canónica.

2.4. Principios de acción cuántica regularizada

Los principios de acción cuántica, descritos en la sección 1.2, son válidos para una teoría renormalizada dimensionalmente, pues de hecho, son ciertos independientemente del esquema de renormalización. Breitenlohner y Maison además establecieron que los siguientes *principios de acción cuántica regularizada*, correlativos a los generales pero con más información, son ciertos además para la teoría *regularizada* dimensionalmente siempre y cuando el término libre regularizado S_{libre} coincida en su forma con su correspondiente cuatridimensional [12], $S_{\text{INT}} = S_{\text{int}} + \int d^d x J_I(x) \phi^I$ con S_{int} un polinomio en los campos y derivadas integrado en el espacio de regularización dimensional, es decir, términos de interacción de una acción local dimensionalmente regularizada, quizás incluyendo contratérminos, es decir, términos de orden no nulo en \hbar , y $Z_{\text{DReg}}[J, K; \lambda] \equiv \langle \exp\{\frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}[\phi, J, K; \lambda]\} \rangle_0$:

1) las variaciones de cualquier parámetro λ , situado en la parte libre y/o de interacción de la acción regularizada conducen a

$$\left\langle \frac{\partial(S_{\text{libre}} + S_{\text{INT}})}{\partial \lambda} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}[\phi, J, K; \lambda]\right\} \right\rangle_0 = -i\hbar \frac{\partial Z_{\text{DReg}}[J, K; \lambda]}{\partial \lambda}. \quad (2.10)$$

2) las variaciones de campos externos $E(x) \equiv J(x)$ ó cualquier otro campo externo $K(x)$ presente en S_{int} conducen a

$$\left\langle \frac{\delta S_{\text{INT}}}{\delta E(x)} \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}[\phi, J, K; \lambda]\right\} \right\rangle_0 = -i\hbar \frac{\delta Z_{\text{DReg}}[J, K; \lambda]}{\delta E(x)}. \quad (2.11)$$

3) las variaciones polinómicas arbitrarias de los campos cuánticos ϕ , $\delta\phi(x) = \delta\theta(x) P(\phi(x))$ dejan al funcional generador de las funciones de Green regularizado dimensionalmente, Z_{DReg} , invariante y se cumple a todo orden en \hbar que

$$\delta Z_{\text{DReg}}[J, K; \lambda] \equiv \left\langle \delta(S_{\text{libre}} + S_{\text{INT}}) \exp\left\{\frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}[\phi, J, K; \lambda]\right\} \right\rangle_0 = 0, \quad (2.12)$$

donde las variaciones son las partes lineales en $\delta\theta$.

Precisemos el significado matemático de las ecuaciones funcionales (2.10), (2.11) y (2.12). En primer lugar, deben entenderse sólo como conjuntos de relaciones entre las expresiones regularizadas de los diagramas. El desarrollo formal en serie de potencias de \hbar , K y J de ambos lados de la ecuación conduce a un conjunto infinito de ecuaciones que involucran diagramas de Feynman en “ d dimensiones”. Es decir, cada ecuación funcional llevará un conjunto muy rico de información.

En [106] se demostró además que estos *principios de acción cuántica regularizada* también son válidos si en cada diagrama regularizado se introduce la “escala” μ tal como se explicó en 2.3.viii).

Nótese que es mucho más fácil manipular la expresión funcional que no las ecuaciones diagramáticas asociadas. Además, estas ecuaciones pueden deducirse con las manipulaciones formales usuales en la integral de caminos, que están justificadas por tanto si se entienden como manipulaciones en relaciones de diagramas regularizados dimensionalmente.

Las ecuaciones funcionales son válidas con cualquier acción regularizada de partida, y en concreto con la acción regularizada a la que se han añadido los contratérminos singulares apropiados hasta el orden n , que denotaremos $S_{\text{DReg},n}$.

Así, el límite $d \rightarrow 4$ en la derecha de las ecuaciones (2.10) y (2.11) existirá en cada orden del desarrollo en \hbar hasta el orden n incluido si Z_{Dreg} se calcula con $S_{\text{DReg},n}$, lo que ya sirve para calcular las variaciones con $J(x)$, $K(x)$ y λ del funcional renormalizado $Z_{\text{ren}}[J; K; \lambda]$ hasta el orden \hbar^n incluido.

Por supuesto, de los *principios de acción regularizada* de las ecs. (2.10), (2.11) y (2.12) se siguen los *principios de acción cuántica* generales comentado en la sección 1.2. Pero además, si *no hay dependencia explícita en d en la acción o en las variaciones involucradas* pueden establecerse [12] los siguientes *principios de acción cuántica*, más precisos que los correspondientes generales de la sección 1.2, para las ecuaciones funcionales en la teoría renormalizada por substracción mínima:

QAP1)

$$\frac{\partial \Gamma_{\text{ren}}}{\partial \lambda} = N\left[\frac{\partial(S_0 + S_{\text{fct},n})}{\partial \lambda}\right] \cdot \Gamma_{\text{ren}}. \quad (2.13)$$

QAP2)

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta E(x)} = N\left[\frac{\delta(S_0 + S_{\text{fct},n})}{\delta E(x)}\right] \cdot \Gamma_{\text{ren}}. \quad (2.14)$$

QAP3) Si $\delta\phi^I(x) = Q^I[\phi](x)$ es una transformación polinómica del conjunto de campos ϕ en el espacio-tiempo de 4 dimensiones y $\int K_{\phi^I}(x) Q^I[\phi](x)$, siendo $K_{\phi}(x)$ el correspondiente conjunto de campos externos, es la única dependencia en $K_{\phi}(x)$ de $S_0 + S_{\text{fct},n}$, entonces

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta K_{\phi^I}(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \phi^I(x)} = N[\mathcal{O}(x)] \cdot \Gamma_{\text{ren}}, \quad (2.15)$$

donde $N[\mathcal{O}(x)]$ es una inserción local de un operador de dimensión ultravioleta igual a $4 - \dim(\phi) + \dim(\delta\phi)$, que coincidirá con $N[Q^I[\phi](x) \frac{\delta(S_0 + S_{\text{fct},n})}{\delta\phi^I(x)}]$ si en la teoría regularizada, no hay dependencia explícita en d .

QAP3') Sea $\phi'^I(x) = Q^I(\phi(x))$ en el caso particular de una transformación lineal de los campos $\phi(x)$ cuyos coeficientes no dependen explícitamente en d en la teoría regularizada, entonces

$$\phi'^I(x) \frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}}{\delta\phi^I(x)} = N[\phi'^I(x) \frac{\delta(S_0 + S_{\text{fct},n})}{\delta\phi^I(x)}] \cdot \Gamma_{\text{ren}}. \quad (2.16)$$

En todas estas ecuaciones, S_0 representa la acción clásica regularizada de partida de orden \hbar^0 y $S_{\text{fct},n} = \sum_{m=1}^n \hbar^m S_{\text{fct}}^{(m)}$ es la suma de todos los contratérminos finitos añadidos, por ejemplo, para alcanzar unas ciertas condiciones de normalización, o para intentar simplificar el lado derecho de unas identidades anómalas. En especial, no incluyen los contratérminos singulares $S_{\text{fct}}^{(m)}$. Γ_{ren} es el funcional generador de las funciones 1PI renormalizadas por substracción mínima obtenido con $S_0 + S_{\text{fct},n}$ como acción de partida.

El símbolo $N[\mathcal{O}(x)]$, donde $\mathcal{O}(x)$ representa cualquier operador compuesto, es decir, producto y derivadas de campos elementales, se denomina a veces *producto normal* [106-107,102]. Este símbolo sólo tiene sentido entendiéndolo como inserción renormalizada dimensionalmente por substracción mínima del operador compuesto $\mathcal{O}(x)$ correspondiente en un funcional generador, en este caso, de funciones 1PI.

Gracias a todos estos principios de acción cuántica particulares del método de regularización y renormalización dimensional, se pueden dar expresiones directas a los lados derechos de las identidades (1.6)-(1.8) de la sección 1.2, identidades que eran válidas en cualquier método de renormalización. Este hecho resultará, como veremos en la secciones siguientes, ser de la mayor importancia para la renormalización algebraica *práctica* de las simetrías BRS en teorías “gauge” quirales.

2.5. Término de ruptura de la simetría BRS

Por los principios de acción cuántica particulares del método de renormalización dimensional por substracción mínima, sabemos que los términos de ruptura en las identidades de Slavnov-Taylor, que expresan la simetría “gauge” a nivel de funciones de Green, vienen dados por la inserción en el funcional 1PI renormalizado, Γ_{ren} , de un cierto producto normal integrado $N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}] = \int d^4x N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}(x)]$, donde $\mathcal{O}_{\text{ruptura}}(x)$ será un operador local de dimensión ultravioleta $4 - \dim(\Phi) + \dim(s\Phi)$ y número de “fantasmas” igual a 1:

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{ren}}) \equiv \int d^4x (s\varphi) \frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}}{\delta\varphi} + \frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta\Gamma_{\text{ren}}}{\delta\Phi} = N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \quad (2.17)$$

donde φ y Φ representan campos que tienen transformaciones BRS, s , lineales o no lineales, respectivamente, y K_Φ representa el campo externo acoplado en la acción a la

transformación BRS no lineal $s\Phi$. Esta inserción renormalizada por substracción mínima de un operador local, $N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ es el término de ruptura Δ de la ec. (1.10), ecuación que fue obtenida a partir de los principios de acción cuántica generales e independientes del esquema de renormalización.

Nuestro problema va a ser cómo calcular de forma práctica $N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ al menos en el orden más bajo \hbar^m en el que tenga un valor no nulo, en la forma más adecuada para poder obtener los contratérminos finitos de orden \hbar^m dentro del procedimiento recursivo en potencias de \hbar .

Por supuesto, siempre puede calcularse, orden a orden, el funcional 1PI renormalizado $\Gamma_{\text{Ren}}[\phi, \Phi, K_\Phi]$ e insertarlo en el lado izquierdo de la (2.17), donde aparece de forma no lineal, por lo que para calcular la contribución a un cierto orden \hbar^m hace falta conocer las contribuciones de órdenes inferiores. De hecho, no haría falta insertar el funcional completo, sino sólo [60] los órdenes más bajos en la aproximación local, ya que el lado derecho de (2.17) es local en su término de orden más bajo en el desarrollo en \hbar . Como hay que calcular partes finitas, el método será muy complejo desde el punto de vista práctico.

En regularización dimensional y gracias a sus *principios de acción regularizada* de las ecs. (2.12) y (2.11) disponemos de un método más eficiente para calcular directamente el término derecho o de ruptura de la simetría.

Así en el apéndice A exponemos la prueba de la siguiente identidad regularizada [19]

$$\begin{aligned}
 \mathcal{S}_d(\Gamma_{\text{DReg}}) &\equiv \int d^d x \left(s_d \varphi \right) \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \Phi(x)} = \\
 &= \hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + [b_d S_{\text{ct},n}] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + \int d^d x \left\{ \left[\frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta \phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right\}. \\
 &= [\mathcal{S}_d(S_0 + S_{\text{ct},n})] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}, \tag{2.18}
 \end{aligned}$$

donde Γ_{DReg} puede ser tanto el funcional 1PI regularizado calculado a partir de la acción con contratérminos singulares y finitos arbitrarios añadidos, $S_{\text{DReg},n}$, como el calculado a partir de la acción con sólo contratérminos finitos arbitrarios añadidos y $S_{\text{ct},n}$ representa la suma de los correspondientes contratérminos. s_d y b_d denotan la generalización al espacio de “ d dimensiones” de las transformaciones BRS y del operador lineal de Slavnov-Taylor dado por la ec. (1.13), respectivamente:

$$b_d = \int d^d x \left(s_d \varphi \right) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta S_0}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta}{\delta \Phi(x)} + \frac{\delta S_0}{\delta \Phi(x)} \frac{\delta}{\delta K_\Phi(x)}. \tag{2.19}$$

El operador compuesto $\hat{\Delta}$ viene dado por $\hat{\Delta} = s_d S_0$, con $S_0 = S_0 \text{ libre} + S_0 \text{ int}$. K_Φ se acopla en la acción regularizada justo a $s_d \Phi$.

Si no hay dependencia explícita en d en las variaciones s_d ni en la acción, entonces también se cumple

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}}) \equiv \int d^4 x \left(s \varphi \right) \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta \Phi(x)} =$$

$$\begin{aligned}
&= N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + N[b_d S_{\text{fct},n}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \int d^4x \left\{ N\left[\frac{\delta S_{\text{fct},n}}{\delta K_{\Phi}(x)} \frac{\delta S_{\text{fct},n}}{\delta \phi(x)}\right] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \right\}. \\
&= N[\mathcal{S}_d(S_0 + S_{\text{fct},n})] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \tag{2.20}
\end{aligned}$$

donde Γ_{Ren} y $N[\cdots] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ son funcionales 1PI renormalizados por substracción mínima y $\Delta_{\text{fct}} = s_d S_{\text{fct},n}$.

Haciendo el desarrollo $S_{\text{fct},n} = \sum_{m=1}^n \hbar^m S_{\text{fct}}^{(m)}$ en la ec. (2.20) se llega a

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}}) &= N[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \hbar N[b_d S_{\text{fct}}^{(1)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \\
&\quad + \hbar^2 N[b_d S_{\text{fct}}^{(2)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \hbar^2 N\left[\int \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta K_{\Phi}} \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta \Phi}\right] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \\
&\quad + \cdots + \hbar^m N[b_d S_{\text{fct}}^{(m)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \hbar^m \sum_{r=1}^{m-1} N\left[\int \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(r)}}{\delta K_{\Phi}} \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(m-r)}}{\delta \Phi}\right] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \\
&\quad + O(\hbar^{(m+1)}). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

Nótese que en (2.21) sólo el primer sumando es la inserción de un operador evanescente, y que cada uno de los sumandos es una serie infinita de potencias en \hbar . Los sumandos que no son evanescentes sólo contribuyen a partir del orden de potencias del factor en \hbar explícito en (2.21).

Si en (2.18) Γ_{DReg} representa el funcional 1PI obtenido a partir de la acción con los contratérminos singulares añadidos de tal forma que el funcional deja de ser singular en $d-4$, entonces del estudio orden a orden de (2.18) puede leerse (2.21), ya que teniendo en cuenta que Γ_{DReg} ahora contiene los contratérminos singulares hasta el orden necesario \hbar^n , denotados por $S_{\text{sct},n}$, entonces se tiene que

$$\text{LIM}_{d \rightarrow 4} \Gamma_{\text{DReg}}[\varphi, \Phi; K_{\Phi}; \mu] = \Gamma_{\text{ren}}[\varphi, \Phi; K_{\Phi}; \mu] \tag{2.22}$$

y los dos lados de la ec. (2.18) entonces son finitos hasta el orden \hbar^n en el que se hayan añadido los contratérminos singulares. Denotaremos ahora por S_{ct} a la suma de los contratérminos singulares S_{sct} y los contratérminos finitos S_{fct} .

Por tanto, y a hasta ese orden \hbar^n , tan alto como se quiera, el lado derecho de la ec. (2.18) es:

$$\begin{aligned}
&N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = \\
&= \text{LIM}_{d \rightarrow 4} \left\{ \hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + [b_d S_{\text{ct},n}] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + \int d^4x \left[\frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_{\Phi}(x)} \frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta \phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right\}, \tag{2.23}
\end{aligned}$$

donde $N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}]$ es el producto normal del lado derecho de la ec. (2.17).

Nótese que siempre que tengamos un símbolo con el superíndice $^{(m)}$ se querrá decir que ese objeto aparece justo en el orden \hbar^m en un desarrollo en potencias de \hbar , es decir

es el coeficiente de orden m . Así, con $N[b_d S_{\text{fct}}^{(1)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}^{(2)}$ queremos decir, “la inserción renormalizada del operador $b_d S_{\text{fct}}^{(1)}$ (donde $S_{\text{fct}}^{(1)}$ es el coeficiente en \hbar^1 del desarrollo de $S_{\text{fct},n}$) en el funcional 1PI hasta el orden \hbar^2 , es decir, considerando exclusivamente diagramas de un “loop”, que aportarían el factor \hbar^1 restante”.

Estudio de (2.18) a un “loop”

El coeficiente en \hbar^1 de (2.18) es

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{DReg}})^{(1)} = \left[s_d S_0 \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]^{(1)} + b_d S_{\text{ct}}^{(1)}. \quad (2.24)$$

La parte divergente del lado izquierdo de (2.24) es nula término a término, por lo que la parte divergente de su lado derecho debe cumplir:

$$\left[s_d S_0 \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{\text{singular}}^{(1)} = -b_d S_{\text{ct}}^{(1)}. \quad (2.25)$$

Es decir, $b_d S_{\text{ct}}^{(1)}$ es exactamente el contratérmino en el esquema MS que cancela la divergencia de $[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}$ a un “loop”. Por tanto, $[b_d S_{\text{ct}}^{(1)}] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}$ a un “loop” dará los diagramas que cancelan todas las subdivergencias no locales de $[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}$ a dos “loops”.

Para calcular la contribución finita a la teoría renormalizada hay que tener en cuenta que $\hat{\Delta} \equiv s_d S_0$ es un operador evanescente que no contribuye a orden \hbar^0 en el límite $\text{LIM}_{d \rightarrow 4} \hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}}$. Por tanto, por la propia definición de inserción renormalizada por substracción mínima se tiene

$$\left[\hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]^{(1)} = \left[\hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{\text{singular}}^{(1)} + \left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)} + \text{contrib. irrelevantes}, \quad (2.26)$$

donde por “contrib. irrelevantes” queremos decir contribuciones que se anulan cuando $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$.

En conclusión, la identidad renormalizada a orden \hbar es:

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}})^{(1)} = N[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}^{(1)} + b S_{\text{fct}}^{(1)} \quad (2.27)$$

siempre y cuando ni en b_d ni en la acción haya dependencia explícita en d .

Estudio de (2.18) a dos “loops”

El coeficiente en \hbar^2 de (2.18) es

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma_{\text{DReg}})^{(2)} = & \left[s_d S_0 \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} + \left[b_d S_{\text{ct}}^{(1)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \\ & + b_d S_{\text{ct}}^{(2)} + \int d^d x \frac{\delta S_{\text{ct}}^{(1)}}{\delta K_{\Phi}} \frac{\delta S_{\text{ct}}^{(1)}}{\delta \Phi}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Nótese que los diagramas que contribuyen al segundo sumando de (2.28) a orden \hbar^2 son diagramas de un “loop”, debido a que contienen una inserción que es de orden \hbar . Como siempre $S_{\text{ct}}^{(2)} = S_{\text{sct}}^{(2)} + S_{\text{fct}}^{(2)}$.

La parte singular de (2.28) es

$$\begin{aligned}
0 = & \left[s_d S_0 \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{singular}} + \left[b_d S_{\text{sct}}^{(1)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{singular}} \\
& + \left[b_d S_{\text{fct}}^{(1)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{singular}} + b_d S_{\text{sct}}^{(2)} \\
& + \int d^d x \left(\frac{\delta S_{\text{sct}}^{(1)}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta S_{\text{sct}}^{(1)}}{\delta \Phi} + \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta S_{\text{sct}}^{(1)}}{\delta \Phi} + \frac{\delta S_{\text{sct}}^{(1)}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta \Phi} \right). \quad (2.29)
\end{aligned}$$

El primer sumando de esta ecuación requiere diagramas a dos “loops”, el segundo son diagramas a un “loop” que cancelan completamente la subdivergencia no local del primer sumando y parte de su divergencia superficial, el tercero son diagramas a un “loop” sólo con divergencias locales y el resto de sumandos son términos locales singulares puros.

Teniendo en cuenta lo comentado acerca de $b_d S_{\text{sct}}^{(1)}$ en el apartado anterior, es fácil ver que las siguientes ecuaciones son ciertas

$$\begin{aligned}
N[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}^{(2)} &= \left[s_d S_0 \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{parte finita}} + \left[b_d S_{\text{sct}}^{(1)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{parte finita}} \\
N[b_d S_{\text{fct}}^{(1)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}^{(2)} &= \left[b_d S_{\text{fct}}^{(1)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{parte finita}}. \quad (2.30)
\end{aligned}$$

Como la parte finita de (2.28) es

$$\begin{aligned}
& \left[s_d S_0 \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{parte finita}} + \left[b_d S_{\text{sct}}^{(1)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{parte finita}} \\
& + \left[b_d S_{\text{fct}}^{(1)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}^{(2)} \Big|_{\text{parte finita}} + b_d S_{\text{fct}}^{(2)} \\
& + \int d^d x \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta \Phi}. \quad (2.31)
\end{aligned}$$

queda demostrado que, para cualquier $S_{\text{fct}}^{(1)}$ y $S_{\text{fct}}^{(2)}$ independientes explícitamente de d y añadidos a la acción regularizada,

$$\begin{aligned}
\mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}})^{(2)} &= N[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}^{(2)} + N[b_d S_{\text{fct}}^{(1)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}^{(2)} \\
& + b_d S_{\text{fct}}^{(2)} + \int \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta \Phi}, \quad (2.32)
\end{aligned}$$

que será la identidad renormalizada básica para el cálculo práctico de los contratérminos finitos a dos “loops” y que coincide con (2.21).

Nuevamente, en (2.32), sólo el primer sumando de la derecha representa una inserción de un operador evanescente.

Comentarios

- i) Si b_d tuviera dependencia explícita en d , entonces $b_d S_{\text{sct}}^{(1)}$ adquiriría una parte finita que tener en cuenta y (2.25) no sería en general cierta, ya que el límite

$$\text{LIM}_{d \rightarrow 4} \left\{ \left[s_d S_0 \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{\text{singular}}^{(1)} + b_d S_{\text{sct}}^{(1)} \right\} \quad (2.33)$$

ya no tendría por que ser nulo (para un ejemplo explícito véase el Apéndice B de la ref [19]).

- ii) Puede decirse que hay dos fuentes que contribuyen al término de ruptura de la identidad de Slavnov-Taylor. Una es la propia regularización, ya que la acción regularizada deja de ser invariante, como se refleja en la contribución de $[s_d S_0 \cdot \Gamma_{\text{DReg}}]^{(1)}$. Y otro es el método de substracción, por ejemplo, las contribuciones finitas de $b_d S_{\text{sct}}^{(1)}$.
- iii) Si la teoría no es anómala para la simetría en cuestión, entonces tiene que poderse elegir contratérminos finitos $S_{\text{fct}}^{(1)}$, $S_{\text{fct}}^{(1)}$ de tal forma que $N[\mathcal{O}_{\text{ruptura}}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = 0$ orden a orden en \hbar , dentro de la estrategia general de la sección 1.3.
- iv) Como el operador $\Delta = s_d S_0$ es evanescente, puede resultar conveniente utilizar las técnicas introducidas por Bonneau en las refs. [106-108] para expresar inserciones de operadores evanescentes, también denominados *anómalos*, en términos de inserciones de operadores no evanescentes. En la siguiente sección abordaremos esta cuestión.
- iv) Por último, recordaremos que las ecuaciones de movimiento son válidas en la teoría renormalizada [12,106,102]:

$$\frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \phi(x)} = N \left[\frac{\delta (S_0 + S_{\text{fct},n})}{\delta \phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{ren}} = \text{LIM}_{d \rightarrow 4} \left\{ \frac{\delta S_{\text{DReg},n}}{\delta \phi(x)} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right\}, \quad (2.34)$$

donde $S_{\text{fct},n}$ incluye todos los contratérminos finitos y $S_{\text{DReg},n}$ tanto los contratérminos finitos como los singulares. Estas ecuaciones pueden obtenerse a partir del principio de acción cuántica (2.16) eligiendo $\phi'(x) = 1$. O de otra forma, la ec. (2.12), para $P(\phi(x)) = 1$, también conduce a la ec. (2.34). El hecho de que se preserven en la teoría renormalizada las ecuaciones de movimiento del campo “fantasma” y del campo auxiliar B que se acopla a la condición de fijación del “gauge”, en general, simplifica enormemente el proceso de renormalización de las teorías con simetría BRS ([18]).

2.6. Términos anómalos e identidades de Bonneau

La teoría de las inserciones renormalizadas de operadores evanescentes, también denominadas *productos normales anómalos* (“producto normal” en lugar de “inserción renormalizada” y “anómalo” en lugar de “evanescente”), es de importancia fundamental en renormalización dimensional para el cálculo de los términos de ruptura de la simetría de las identidades de Ward o de Slavnov-Taylor [106-108,102]. Por el momento, toda la potencia de esta teoría no ha sido aprovechada en el caso de identidades de Slavnov-Taylor. Aunque para el caso de un “loop” no es realmente necesaria, por su posible extensión al caso de varios “loops”, donde debería ser patente dicha potencia, en esta tesis se dedicará algunos comentarios y cálculos a esta teoría de los productos normales de los operadores evanescentes (recordemos que se dice que un operador O_d es evanescente si su expresión correspondiente en 4 dimensiones es nula, o más precisamente, si $\text{LIM}_{d \rightarrow 4} O_d = 0$).

Gracias a esta teoría, es posible desarrollar el producto normal de un operador evanescente (o también llamado anómalo) en una combinación lineal de productos normales de operadores no evanescentes (que también llamamos estándares) de una forma sistemática y en todo orden del desarrollo perturbativo. Veremos en los modelos concretos de los capítulos siguientes cómo gracias a ese desarrollo $[N[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{ren}}]^{(1)}$ (véase la ec. (2.27)) generará tanto la anomalía esencial como anomalías espurias.

En una teoría perturbativa renormalizada, cualquier conjunto de inserciones de operadores cuánticos tal que su aproximación clásica sea una base del espacio lineal de operadores clásicos de dimensión acotada por 4 es también una base del espacio lineal de las inserciones de operadores cuánticos, con dimensión acotada también por 4 [18]. Por tanto, en renormalización dimensional, si $\{\mathcal{O}^i\}$ forma una de estas bases en el espacio clásico de operadores sobre el espacio-tiempo de 4 dimensiones, entonces $\{N[\mathcal{O}^i] \cdot \Gamma_{\text{ren}}\}$, donde \mathcal{O}^i es cualquier de las generalizaciones posibles al “espacio de d dimensiones” del correspondiente operador clásico cuatridimensional, es una base del espacio de inserciones cuánticas. Recordemos que denominamos “estándares” o “no evanescentes” a los operadores en el espacio-tiempo de “ d dimensiones” de la regularización dimensional que son generalizaciones de los operadores clásicos de cuatro dimensiones.

Por tanto, los productos normales anómalos, es decir las inserciones renormalizadas por substracción mínima de operadores evanescentes, deben poder desarrollarse en términos de una base de productos normales estándares. Este hecho fue establecido de forma rigurosa por Bonneau en la ref. [107] quien demostró la existencia de un sistema lineal de identidades con una estructura similar a las de Zimmermann [109] y que sirven para expresar la descomposición de cualquier producto normal anómalo en términos de todos los posibles productos normales de operadores, incluyendo tanto los estándares (o no evanescentes) como los anómalos (o evanescentes). Resolviendo este sistema se llega al desarrollo deseado.

Si sólo hay un campo escalar, las identidades de Bonneau tienen la siguiente forma

$$\begin{aligned}
N[\hat{g}_{\mu\rho}\mathcal{O}^{\mu\rho}](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = & - \sum_n \sum_r \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_r\} \\ 1 \leq i_j \leq n}} \left\{ \text{r.s.p.} \frac{(-i)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial p_{i_1}^{\mu_1} \dots \partial p_{i_r}^{\mu_r}} \overline{\langle \tilde{\phi}(p_1) \dots \tilde{\phi}(p_n) N[\check{g}_{\mu\rho}\mathcal{O}^{\mu\rho}] \rangle^{1\text{PI}}} \right\} \Big|_{p_i \equiv \check{g} \equiv 0} \\
& \times N\left[1/n! \prod_{k=1}^n \left\{ \left(\prod_{\{\alpha/i_\alpha=k\}} \partial_{\mu_\alpha} \right) \phi \right\} \right](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \tag{2.35}
\end{aligned}$$

donde la tilde indica campos transformados de Fourier, la barra que sólo se ha llevado a cabo la substracción mínima de la subdivergencias, r.s.p. significa “residuo del polo simple en $\varepsilon = 4 - d$ ” (esta es la razón por la que hay un signo global -1 : $\hat{g}^\mu_\mu = -\varepsilon$) y el símbolo \times quiere decir que la estructura tensorial $\{\dots\}$ aparece realmente *dentro* del producto normal. Por supuesto, cualquier factor en forma de número puro o de color puede sacarse fuera del producto normal, pero nótese que $g_{\mu\nu}N[\mathcal{O}^{\mu\nu}] = N[\bar{g}_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu}] \neq N[g_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu}]$, siendo la diferencia el producto normal anómalo $N[\hat{g}_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu}]$, que en general no será nulo. La suma en n es una suma en el número de campos del monomio y la suma en r , una suma en el número de derivadas del monomio.

El tensor \check{g} es un objeto covariante nuevo, que se ha introducido para simplificar la notación de los cálculos. Sus propiedades son:

$$\begin{aligned}
\check{g}_{\mu\nu} &= \check{g}_{\nu\mu}, & \check{g}_\mu^\mu &= 1, \\
\check{g}_{\mu\rho}g^\rho_\nu &= \check{g}_{\mu\rho}\hat{g}^\rho_\nu = \check{g}_{\mu\nu} \\
\check{g}_{\mu\rho}\bar{g}^{\rho\mu} &= 0, & N[\check{g}_{\mu\nu}\mathcal{O}^{\mu\nu}] &= \check{g}_{\mu\nu}N[\mathcal{O}^{\mu\nu}]. \tag{2.36}
\end{aligned}$$

La ec. (2.35) se generaliza fácilmente cuando la teoría involucra varios campos no necesariamente escalares. En ese caso habrá además una suma sobre todos los tipos de campos y habrá que tener especial cuidado con los factores de simetría y los signos fermiónicos. En el capítulo siguiente, daremos la generalización de la ec. (2.35) relevante para los cálculos del modelo en cuestión.

Debido al hecho de que todas sus subdivergencias se han substraído previamente, la función 1PI de la ec. (2.35) tiene una parte singular polinómica. Sólo es necesario calcular el coeficiente del polo simple de esta parte singular, que será en general una combinación de productos de métrica, constantes y factores de color. En teorías “gauge” vectoriales con la regularización “canónica”, esta estructura tensorial no implicará más que la métrica habitual, lo que combinado con los índices tensoriales del producto normal da un desarrollo del producto normal anómalo en términos exclusivamente de una base de productos normales de operadores no evanescentes. Sin embargo, si en la teoría regularizada o si en los cálculos aparecen objetos “con gorro”, entonces las identidades de Bonneau (ec. (2.35)) expresarían cualquier producto normal anómalo en términos de una colección de productos normales de operadores no evanescentes (\mathcal{M}^i) y evanescentes ($\hat{\mathcal{M}}^j$). Es decir

$$N[\hat{g}_{\mu\rho}\mathcal{O}^{\mu\rho}](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = \sum_i \alpha_i N[\mathcal{M}^i](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \sum_j \hat{\alpha}_j N[\hat{\mathcal{M}}^j](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}}. \tag{2.37}$$

De igual forma, el resto de operadores evanescentes independientes también podrían desarrollarse mediante una fórmula similar, obteniéndose así un sistema lineal de identidades.

Un operador evanescente no contribuye a la teoría renormalizada en el nivel árbol, por lo que el lado izquierdo de las identidades de Bonneau es de orden \hbar^1 , como mínimo. Además cualquier coeficiente α_i , $\hat{\alpha}_j$, ya que viene dados por residuos de polos simples, es una serie formal en \hbar también de orden \hbar^1 como mínimo. Por tanto las identidades de Bonneau no sólo no forman un sistema trivial sino que además su solución es única y da el desarrollo deseado exclusivamente en términos de una base de inserciones de operadores no evanescentes:

$$N[\hat{g}_{\mu\rho}\mathcal{O}^{\mu\rho}](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = \sum_i q_i N[\mathcal{M}^i](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \quad (2.38)$$

donde los coeficientes q_i son series formales en \hbar empezando en \hbar^1 .

En el orden más bajo, el sistema está desacoplado y tiene una interpretación muy sencilla: los “loops” con la inserción anómala se reemplazan por sumas de los diagramas del nivel árbol correspondientes a la inserción de los operadores no evanescentes, pero con coeficientes de orden \hbar^1 . Esto será relevante para los cálculos de más adelante. En general, para el cálculo de q_i a orden \hbar^m , se necesitarán los coeficientes α_i hasta el orden \hbar^m y los coeficientes $\hat{\alpha}_i$ hasta el orden $\hbar^{(m-1)}$.

2.7. Renormalización algebraica de la simetría BRS

En principio, es de esperar que un método arbitrario de renormalización elegido conduzca a unas funciones de Green renormalizadas que no satisfacen las identidades que representan la simetría BRS de la acción de partida o identidades de Slavnov-Taylor.

Si la teoría tiene una anomalía, es decir, si ninguno de entre todos los esquemas de renormalización posibles satisface las identidades de Slavnov-Taylor, entonces, obviamente, la renormalización dimensional mínima siempre conducirá a un término de ruptura en dichas identidades. Si, incidentalmente, los números cuánticos de los campos son de tal forma que se produce el mecanismo de cancelación de las anomalías (esenciales), entonces sabemos por la sección 1.3, que orden a orden en potencias de \hbar , es posible preservar la simetría mediante la simple adición de contratérminos finitos.

Este resultado es de hecho independiente del método de renormalización utilizado. En concreto, la renormalización de las simetrías mediante regularización dimensional puede realizarse en la siguiente forma

- i) Supóngase que m es el orden más bajo del desarrollo en \hbar en el que la simetría BRS tiene un término de ruptura.
- ii) Utilizando los principios de acción cuántica regularizada de la sección 2.4, dése una expresión directa en términos de inserciones de operadores para el término de ruptura de las identidades de Slavnov-Taylor en el orden \hbar^m considerado. La contribución real

de esta expresión en el orden \hbar^m será local e incluirá tanto la inserción de operadores regularizados estándares como evanescentes.

- iii) Exprésese el término de ruptura en términos de inserciones de operadores regularizados no evanescentes utilizando las identidades de Bonneau de la sección 2.5 para descomponer las inserciones de operadores evanescentes. Para ello será necesario calcular explícitamente el polo simple de la parte divergente por conteo de potencias de ciertos diagramas de Feynman.
- iv) Extráiganse de esta última expresión del término de ruptura los contratérminos finitos de orden \hbar^m necesarios para recuperar la simetría, eligiendo cualquier generalización en el espacio de “ d dimensiones” del contratérmino. Denotaremos esta elección por $\hbar^m S_{\text{fct}}^{(m)}$, y añádanse a la acción de partida para obtener una nueva acción $S_{\text{DReg},m} = S_{\text{DReg},m-1} + \hbar^m S_{\text{fct}}^{(m)}$.
- v) Con esta nueva acción, rehágase de nuevo la teoría de perturbaciones con renormalización dimensional mínima, lo que de hecho sólo supondrá una modificación local trivial a orden \hbar^m , y modificaciones no locales complejas a órdenes siguientes. El nuevo funcional 1PI renormalizado, $\Gamma_{\text{ren}}[\phi; K; \lambda; \mu]$, satisfará hasta el orden \hbar^m las identidades de Slavnov-Taylor.
- vi) Ahora, procédase al orden siguiente \hbar^{m+1} de la misma forma a partir de i) y así sucesivamente.

Extracción sistemática de los contratérminos finitos en todo orden

Recordemos que un operador polinómico en campos y derivadas no evanescente o estándar en el espacio de regularización dimensional, se caracteriza porque no es nulo cuando se establece $d = 4$ y todos los objetos “ $d - 4$ dimensionales” a 0, teniendo en cuenta las reglas del álgebra en 4 dimensiones. Y que cuando se añade un operador evanescente a uno no evanescente, el resultado sigue siendo no evanescente. En cambio la suma o diferencia de dos operadores no evanescentes puede ser evanescente.

Veamos un ejemplo explícito. Sean $v_1 = i \bar{\psi} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_4} \gamma_\mu \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \gamma^{\mu_4} \psi$ y $v_2 = i \bar{\psi} \epsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu} \gamma^{\mu_1} \gamma^{\mu_2} \gamma^{\mu_3} \psi$ dos monomios no evanescentes. De hecho son expresiones “normales” en el sentido de que no llevan ningún objeto “con barra” o “con gorro” y en el de que las expresiones correspondientes en el álgebra de Dirac habitual de 4 dimensiones tienen la misma forma.

Utilizando el álgebra BMHV en “ d dimensiones” se obtiene que $1/24 v_1 + 1/6 v_2 = \bar{\psi} \hat{\gamma}_\mu \gamma_5 \psi$, es decir, un operador evanescente, que no tiene correspondiente en el espacio de 4 dimensiones. Por supuesto $1/24 v_1$ y $1/6 v_2$ corresponden ambos con el mismo elemento del álgebra en 4 dimensiones ($\bar{\psi} \gamma_\mu \gamma_5 \psi$)

Por tanto, si dentro del álgebra BMHV decimos que dos polinomios no evanescentes que se diferencian en un término evanescente son equivalentes y asociamos la clase 0 a todos los polinomios evanescentes, entonces el conjunto de polinomios en campos y sus derivadas queda dividido en clases de equivalencia, clases que forman un espacio vectorial. Así los v_1 y v_2 del ejemplo estarían en la misma clase de equivalencia.

Sea el conjunto de posible contratérminos finitos, es decir de polinomios en campos y sus derivadas, invariantes Lorentz, con número de fantasmas igual a 0, de dimensión de masas igual o menor que 4 (en el supuesto de una teoría renormalizable por conteo de potencias) e integrados en el espacio de regularización dimensional. Sea una base del espacio vectorial de clases de equivalencia asociado a este conjunto según el párrafo anterior. Y sea $\{X^j\}_{j=1,\dots,J}$ una colección de contratérminos finitos formada eligiendo un representante de cada clase de equivalencia miembro de la base de dicho espacio vectorial. Es decir, cada X^j es un contratérmino finito no evanescente. Diremos entonces que $\{X^j\}$ es una base del espacio regularizado de los contratérminos finitos no evanescentes.

Sea $\{\mathcal{M}^i\}$ una base del espacio similar pero con número de fantasmas igual a 1, es decir, del espacio de los términos de ruptura.

Introducimos las constantes dependientes del modelo b^j_i y a_i^{jk} así,

$$b_d X^i \equiv b^j_i \mathcal{M}^i, \quad \int d^d x \frac{\delta X^j}{\delta K_\Phi} \frac{\delta X^k}{\delta \Phi} \equiv a_i^{jk} \mathcal{M}^i. \quad (2.39)$$

Si en b_d no hay dependencia explícita en d , siempre podemos elegir $\{X^j\}$ y $\{\mathcal{M}^i\}$ de tal forma que los coeficientes b^j_i y a_i^{jk} sean constantes independientes de d .

Supongamos que se han añadido a la acción los contratérminos finitos $\sum_{m=1} \hbar^m S_{\text{fct}}^{(m)}$ con $S_{\text{fct}}^{(m)} = x_j^{(m)} X^j$. Queremos que los coeficientes $x_j^{(m)}$, independientes de d , sean elegidos de tal forma que se recuperen las identidades que expresan la simetría. Este es nuestro problema que resolvemos de forma sistemática y recursiva en el orden m en \hbar . Por tanto, si m es el orden en el que estamos resolviendo el problema, $x_j^{(m)}$ son las incógnitas y $x_j^{(1)} \dots, x_j^{(m-1)}$ son constantes ya conocidas de la resolución del problema a órdenes inferiores.

Consideremos cada término del lado derecho de la ec. (2.21), que expresa la ruptura de la simetría en dichas identidades:

- i) El primer término puede desarrollarse de forma sistemática calculando residuos del polo simple de determinados diagramas 1PI gracias a las identidades de Bonneau de la sección anterior:

$$N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = \sum_{m=1} \hbar^m q_i^{(m)} N[\mathcal{M}^i] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \quad (2.40)$$

donde cada $q_i^{(m)}$, si $m > 1$, depende de los coeficientes $x_j^{(1)} \dots, x_j^{(m-1)}$ calculados previamente en el orden anterior.

- ii) Utilizando la ec. (2.39), puede ponerse el segundo término en la forma

$$\sum_{m=1} \hbar^m N[b_d S_{\text{fct}}^{(m)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = \sum_{m=1} \hbar^m b^j_i x_j^{(m)} N[\mathcal{M}^i] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}. \quad (2.41)$$

- iii) De igual forma, el tercer término es

$$\sum_{m=1} \hbar^m \sum_{r=1}^{m-1} N \left[\frac{\delta S_{\text{fct}}^{(r)}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(m-r)}}{\delta \Phi} \right] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} =$$

$$= \sum_{m=1} \hbar^m \sum_{r=1}^{m-1} x_k^{(r)} x_k^{(m-r)} a_i^{jk} \mathcal{N}[\mathcal{M}^i] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}. \quad (2.42)$$

Teniendo en cuenta los resultados (2.40)-(2.42), queda establecido que el problema queda resuelto encontrando de forma recursiva en m las soluciones de los siguientes sistemas lineales:

$$\begin{aligned} b_i^j x_j^{(1)} &= -q_i^{(1)}, \\ &\dots \\ b_i^j x_j^{(m)} + \sum_{r=1}^{m-1} x_k^{(r)} x_k^{(m-r)} a_i^{jk} &= -q_i^{(m)}(x_j^{(1)} \dots, x_j^{(m-1)}). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Para el primer orden se empezaría obteniendo, mediante cálculo de diagramas a un “loop”, los coeficientes $q_i^{(1)}$ del desarrollo (2.40), y se resolvería el sistema lineal dado por la primera línea de (2.43). El sistema debería ser compatible e indeterminado, pues siempre debe quedar una libertad en la elección de las constantes $x_j^{(1)}$ igual a la dimensión del espacio de monomios invariantes bajo b . Una vez conocidas las incógnitas $x_j^{(1)}$, ya se pueden obtener los coeficientes $q_i^{(2)}$ calculando diagramas de Feynman según las fórmulas de Bonneau, lo que nos daría el lado derecho de la siguiente línea del sistema, así como escribir directamente el segundo término del lado de la izquierda, lo que permite resolver el sistema a orden \hbar^2 . Y así se procedería, recursivamente en m hasta el orden deseado.

Es decir, el único cálculo con diagramas según este método es el de los coeficientes del desarrollo (2.40). Nótese que este método se aplicaría de igual forma en teorías que tienen una anomalía esencial. Simplemente, los coeficientes $q_i^{(m)}$ de los términos del lado derecho de (2.40) correspondientes a la auténtica anomalía esencial no se considerarían en el sistema lineal (2.43).

Cálculo directo de los contratérminos finitos en órdenes bajos

En órdenes bajos de la teoría de perturbaciones, no es difícil obtener los sistemas de ecuaciones lineales correspondientes de una forma más directa a partir de (2.21), sin necesidad de utilizar las fórmulas de Bonneau (2.35), en teorías en las que sea posible, y así lo impongamos, que el lado derecho de (2.21) sea nulo, es decir en modelos sin anomalía esencial.

** Caso de un “loop”*

Nuestro objetivo es obtener primero una expresión para $bS_{\text{fct}}^{(1)}$, y dado que sabemos la expresión del operador lineal b , luego resolver el sistema en $S_{\text{fct}}^{(1)}$. Para obtener dicha expresión imponemos que el lado derecho de (2.21) sea nulo en orden \hbar .

Como la parte finita de los diagramas de un “loop” con la inserción del operador evanescente $s_d S_0$ no es evanescente y además es local, obtenemos directamente $-bS_{\text{fct}}^{(1)}$ sin más que hacer $d \rightarrow 4$ y establecer a cero todos los objetos “en $d - 4$ dimensiones” de dicha parte finita.

Nótese que $bS_{\text{fct}}^{(1)}$ juega el papel del contratérmino finito de la inserción en orden de un “loop” de $s_d S_0$ necesario en una renormalización no mínima de $s_d S_0$ definida de tal forma que su valor, local, a un “loop” sea nulo.

* *Caso de dos “loops”*

Ahora nuestro objetivo es obtener primero una expresión para $bS_{\text{fct}}^{(2)}$ y luego resolver el sistema lineal en $S_{\text{fct}}^{(2)}$.

La combinación $N[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \hbar N[b_d S_{\text{fct}}^{(1)}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ de (2.21) en orden \hbar^2 implica calcular al menos los diagramas de dos “loops” con la inserción de $s_d S_0$ y los diagramas de un “loop” con algún contratérmino singular de un “loop” o con la inserción de $b_d S_{\text{fct}}^{(1)}$. Como este último operador es la regularización del contratérmino finito de la renormalización en orden de un “loop” del operador evanescente $s_d S_0$, el resultado de la parte finita de la suma de esos dos tipos de diagramas será local. Denotemos el límite “cuatridimensional” de dicho resultado por $L_1^{(2)}$.

También será local el resultado de la parte finita de cada diagrama de un “loop” con la inserción del operador evanescente $s_d S_0$ tales que un vértice del diagrama es uno de los contratérminos finitos $S_{\text{fct}}^{(1)}$ de la acción de orden \hbar^1 . Estos diagramas aparecen en el cálculo de $N[s_d S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ en el orden de dos “loops”. Denotemos el límite cuatridimensional de la suma de sus resultados por $L_2^{(2)}$.

Así, tras imponer que el lado derecho de (2.21) sea nulo, obtenemos directamente

$$bS_{\text{fct}}^{(2)} = -L_1^{(2)} - L_2^{(2)} - \int \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta K_\Phi} \frac{\delta S_{\text{fct}}^{(1)}}{\delta \Phi}$$

Por supuesto, los dos métodos descritos deben conducir a los mismos resultados, sirviendo los resultados de uno de comprobación de los del otro.

Capítulo 3.

Modelo Yang-Mills quirral no abeliano.

3.1. La acción clásica

La acción clásica en 4 dimensiones invariante bajo las transformaciones BRS es

$$S_{\text{cl}} = S_{\text{inv}} + S_{\text{gf}} + S_{\text{ext}}, \quad (3.1)$$

con

$$\begin{aligned} S_{\text{inv}} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{D}_{\text{L}} \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi}' \overleftrightarrow{D}_{\text{R}} \psi' \right], \\ S_{\text{gf}} &= \int d^4x \left[\text{Tr} \frac{\alpha}{2} B^2 + \text{Tr} B (\partial_\mu A^\mu) - \text{Tr} \bar{\omega} \partial^\mu \nabla_\mu \omega \right], \\ S_{\text{ext}} &= \int d^4x \left[\text{Tr} \rho^\mu s A_\mu + \text{Tr} \zeta s \omega + \bar{L} s \psi + L s \bar{\psi} + \bar{R} s \psi' + R s \bar{\psi}' \right], \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde $A_\mu = A_\mu^a \tau^a$, $\omega, \bar{\omega}, B, \rho$ y ζ toman valores sobre un álgebra de Lie de un grupo de Lie simple y compacto G . τ^a son los generadores de G en una representación finita dada, normalizada de tal manera que $\text{Tr} [\tau^a \tau^b] = \delta^{ab}$. Así se tiene $[\tau^a, \tau^b] = i c^{abc} \tau^c$, siendo c^{abc} completamente antisimétrico, lo que define la representación adjunta $(T_{\text{A}}^a)_{ij} = -i c^{aij}$ con una cierta normalización $\text{Tr} [T_{\text{A}}^a T_{\text{A}}^b] = T_{\text{A}} \delta^{ab}$, $(T_{\text{A}}^e T_{\text{A}}^e)_{ij} = C_{\text{A}} \delta_{ij}$, $T_{\text{A}} = C_{\text{A}}$. En adelante se utilizarán las siguientes definiciones

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^a \tau^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu], \\ \nabla_\mu \phi^a &= \partial_\mu \phi^a + c^{abc} A_\mu^b \phi^c, \quad \text{donde } \phi \text{ es cualquier objeto con valores en el álgebra de Lie} \\ D_{\text{L}\mu} \psi &= (\partial_\mu - i A_\mu^a T_{\text{L}}^a P_{\text{L}}) \psi, \\ D_{\text{R}\mu} \psi' &= (\partial_\mu - i A_\mu^a T_{\text{R}}^a P_{\text{R}}) \psi'. \end{aligned} \quad (3.3)$$

A_μ^a son los campos bosónicos de “gauge” no abelianos. ω^a y $\bar{\omega}_a$ son los campos “fantasma” (“ghosts” en inglés) y “antifantasma”, respectivamente, que en este modelo

denotamos así para distinguirlos mejor en la notación de las constantes de estructura c^{abc} , mientras que en el resto de modelos de esta memoria de tesis se denotará a los campos “fantasma” y “antifantasma” por los símbolos c y \bar{c} . B es el campo auxiliar de Lautrup-Nakanishi, utilizado para la fijación del “gauge” en un “gauge” de Lorentz con parámetro α . ρ_a^μ , ζ_a , \bar{L} , L , \bar{R} y R son campos externos acoplados a las variaciones no lineales BRS de A_μ^a , ω^a , ψ , $\bar{\psi}$, ψ' y $\bar{\psi}'$ respectivamente. ψ representa una colección de multipletes fermiónicos de Dirac “levógiros” (o “left-handed” en inglés), mientras que ψ' son multipletes fermiónicos de Dirac “dextrógiros” (“right-handed”) que transportan representaciones finitas, T_L^a y T_R^a , respectivamente, de los generadores del grupo, que cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} [T_L^a, T_L^b] &= ic^{abc} T_L^c, & [T_R^a, T_R^b] &= ic^{abc} T_R^c, \\ \text{Tr}[T_L^a T_L^b] &= T_L \delta^{ab}, & \text{Tr}[T_R^a T_R^b] &= T_R \delta^{ab}, \\ T_L^e T_L^e &= C_L, & T_R^e T_R^e &= C_R. \end{aligned} \quad (3.4)$$

También introducimos la notación abreviada:

$$\begin{aligned} \text{Tr}[T_L^{a_1} \cdots T_L^{a_n}] &\equiv T_L^{a_1 \cdots a_n}, & \text{Tr}[T_R^{a_1} \cdots T_R^{a_n}] &\equiv T_R^{a_1 \cdots a_n}, \\ T_L^{a_1 \cdots a_n} + T_R^{a_1 \cdots a_n} &\equiv T_{L+R}^{a_1 \cdots a_n}, & T_L^{a_1 \cdots a_n} - T_R^{a_1 \cdots a_n} &\equiv T_{L-R}^{a_1 \cdots a_n}, \\ \text{Tr}_L[\phi_1 \cdots \phi_n] &\equiv \phi_1^{a_1} \cdots \phi_n^{a_n} \text{Tr}[T_L^{a_1} \cdots T_L^{a_n}], \\ \text{Tr}_R[\phi_1 \cdots \phi_n] &\equiv \phi_1^{a_1} \cdots \phi_n^{a_n} \text{Tr}[T_R^{a_1} \cdots T_R^{a_n}]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

De ahora en adelante los índices correspondientes que etiquetan a cada multiplete fermiónico quedarán sobreentendidos en cada ecuación que escribamos: por ejemplo, cada multiplete levógiro ψ^I podría llevar diferente T_L^I, C_L^I , etc.

Para la acción escogida, el propagador libre bosónico es (en el espacio de momentos):

$$g^2 \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \delta^{ab} \left[g^{\mu\nu} - \left(1 - \frac{\alpha}{g^2}\right) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right] = g^2 \frac{-i}{k^2 + i\epsilon} \delta^{ab} \left[\left(g^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}\right) + \frac{\alpha}{g^2} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} \right]. \quad (3.6)$$

Ya que en los cálculos perturbativos la combinación α/g^2 aparecerá con frecuencia, la denotamos por α' . Por tanto, el gauge de Feynman se define por $\alpha = g^2$ o $\alpha' = 1$ [†].

S_{cl} queda invariante en 4 dimensiones bajo las siguientes transformaciones BRS:

$$\begin{aligned} s\psi &= i\omega^a T_L^a P_L \psi, & s\bar{\psi} &= i\bar{\psi} T_L^a P_R \omega^a, \\ s\psi' &= i\omega^a T_R^a P_R \psi', & s\bar{\psi}' &= i\bar{\psi}' T_R^a P_L \omega^a, \\ sA_\mu &= \nabla_\mu \omega, & s\omega &= i\omega^2, & s\bar{\omega} &= B, & sB &= 0, \\ s\rho^\mu &= 0, & s\zeta &= 0, & sL &= s\bar{L} = sR = s\bar{R} = 0. \end{aligned} \quad (3.7)$$

[†] Si se reescalan los campos con g : $A \rightarrow gA'$, $\omega \rightarrow g\omega'$, $\bar{\omega} \rightarrow g^{-1}\bar{\omega}'$; y $\alpha \rightarrow g^2\alpha'$, entonces la acción adopta la otra forma usual, con g interpretado entonces como la constante de “acoplamiento” de una forma más directa.

	con 1.2 pt con 1.2 pt con 1.2 pt	s	A_μ	ψ, ψ'	ω	$\bar{\omega}$	B	ρ_μ	ζ	L, R
N fant.	con 1.2 pt con 1.2 pt con 1.2 pt	1	0	0	1	-1	0	-1	-2	-1
Dimensión	con 1.2 pt con 1.2 pt con 1.2 pt	0	1	3/2	0	2	2	3	4	5/2
Conmutat.	con 1.2 pt con 1.2 pt con 1.2 pt	-1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1	+1

Tabla 1: Número de fantasmas y dimensiones de los campos. En la última fila, +1 (-1) significa que el símbolo conmuta (anticonmuta)

Para tener esa invariancia es fundamental la anticonmutatividad de γ_5 , lo que es cierto en 4 dimensiones, permitiéndonos escribir S_{inv} en la forma explícitamente invariante gauge

$$S_{\text{inv}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi}_L \overleftrightarrow{D}_L \psi_L + \frac{i}{2} \bar{\psi}'_R \overleftrightarrow{D}_R \psi'_R + \frac{i}{2} \bar{\psi}_R \overleftrightarrow{\not{D}} \psi_R + \frac{i}{2} \bar{\psi}'_L \overleftrightarrow{\not{D}} \psi'_L \right]. \quad (3.8)$$

La acción preserva el número de fantasmas. Este valor junto con las dimensiones de masas de los campos y el tipo de conmutatividad se muestra en la tabla 1.

El operador lineal de Slavnov-Taylor en 4 dimensiones b es:

$$b \equiv s + \int d^4x \left\{ \text{Tr} \frac{\delta S_{\text{cl}}}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta \rho^\mu} + \text{Tr} \frac{\delta S_{\text{cl}}}{\delta \omega} \frac{\delta}{\delta \zeta} + \frac{\delta S_{\text{cl}}}{\delta \psi} \frac{\delta}{\delta \bar{L}} + \frac{\delta S_{\text{cl}}}{\delta \psi'} \frac{\delta}{\delta \bar{R}} + \frac{\delta S_{\text{cl}}}{\delta \bar{\psi}} \frac{\delta}{\delta L} + \frac{\delta S_{\text{cl}}}{\delta \bar{\psi}'} \frac{\delta}{\delta R} \right\}, \quad (3.9)$$

que satisface $b^2 = 0$ porque es la linealización del operador de Slavnov-Taylor y la acción clásica satisface las identidades de Slavnov-Taylor [18].

Las combinaciones clásicas invariantes bajo b son:

$$\begin{aligned} L_g &= g \frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial g} = \frac{1}{2g^2} \int d^4x \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \\ L_A &= b \cdot \int d^4x \tilde{\rho}_\mu^a A^{a\mu}, \quad L_\omega = -b \cdot \int d^4x \zeta^a \omega^a, \\ L_\psi^L &= -b \cdot \int d^4x \bar{L} P_L \psi + \bar{\psi} P_R L = 2 \int d^4x \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\not{D}} P_L \psi + \bar{\psi} \gamma^\mu P_L T_L^a \psi A_\mu^a, \\ L_{\psi'}^R &= -b \cdot \int d^4x \bar{R} P_R \psi' + \bar{\psi}' P_L R = 2 \int d^4x \frac{i}{2} \bar{\psi}' \overleftrightarrow{\not{D}} P_R \psi' + \bar{\psi}' \gamma^\mu P_R T_R^a \psi' A_\mu^a, \end{aligned} \quad (3.10)$$

$$L_\psi^R = -b \cdot \int d^4x \bar{L} P_R \psi + \bar{\psi} P_L L = 2 \int d^4x \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} P_R \psi,$$

$$L_{\psi'}^L = -b \cdot \int d^4x \bar{R} P_L \psi' + \bar{\psi}' P_R R = 2 \int d^4x \frac{i}{2} \bar{\psi}' \overleftrightarrow{\partial} P_L \psi';$$

donde $\tilde{\rho}^\mu = \rho^\mu + \partial^\mu \bar{\omega}$. Veremos más adelante que no necesitaremos hacer uso de L_ψ^R ni de $L_{\psi'}^L$, debido a nuestra elección del vértice quiral regularizado.

Se puede demostrar [18] que el término no trivial de la cohomología, L_g , está asociado con la renormalización finita de la constante de acoplamiento g , mientras que los términos exactos bajo b , L_ψ , $L_{\psi'}$, L_A y L_ω dan lugar a renormalizaciones finitas de las correspondientes funciones de onda en el espacio de funcionales de campo del espacio-tiempo de 4 dimensiones.

3.2. La acción regularizada dimensionalmente

Nuestro propósito ahora es elegir una expresión en el espacio de “ d dimensiones” de la acción clásica S_0 (diremos que es la acción “regularizada dimensionalmente” de orden \hbar^0). Si queremos utilizar los principios de acción cuántica de la sección 2.4, no hay ambigüedad en la elección de los términos cinéticos ya que deben tener la forma canónica. No es así para los términos de interacción. Nótese, por ejemplo, que la parte de matriz de Dirac del vértice de interacción de un fermión “levógiro” con el bosón de gauge tiene varias formas equivalentes en 4 dimensiones: $\gamma^\mu P_L = P_R \gamma^\mu = P_R \gamma^\mu P_L$. Todas estas formas son diferentes en el espacio de “ d dimensiones” de la regularización dimensional, debido a que γ_5 ya no es un objeto anticonmutante. Por supuesto, la generalización de la interacción al espacio de regularización dimensional no solo no es única, sino que cualquier elección es *igual de correcta*, aunque algunas elecciones serán más convenientes que otras, por ejemplo, porque respeten algunas simetrías como las discretas.

Elegimos la siguiente acción regularizada dimensionalmente

$$S_0 = \int d^d x \left[-\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{\partial} \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi}' \overleftrightarrow{\partial} \psi' + (\bar{\psi} \gamma^\mu P_L T_L^a \psi + \bar{\psi}' \gamma^\mu P_R T_R^a \psi') A_\mu^a + \right. \\ \left. \int d^d x \text{Tr} \frac{\alpha}{2} B^2 + \text{Tr} B(\partial_\mu A^\mu) - \text{Tr} \bar{\omega} \partial^\mu \nabla_\mu \omega + \right. \\ \left. \int d^d x \text{Tr} \rho^\mu s_d A_\mu + \text{Tr} \zeta s_d \omega + \bar{L} s_d \psi + L s_d \bar{\psi} + \bar{R} s_d \psi' + R s_d \bar{\psi}', \right. \quad (3.11)$$

donde el vértice quiral $\bar{\gamma}^\mu P_L$ ($\bar{\gamma}^\mu P_R$) puede escribirse en la forma equivalente $P_R \gamma^\mu P_L$, por la anticonmutatividad de γ_5 con $\bar{\gamma}^\mu$.

Generalizamos además, en la forma canónica, las variaciones BRS (que denotaremos por s_d y que denominaremos como las variaciones BRS regularizadas dimensionalmente). Así, no aparecen operadores evanescentes que dependen de forma explícita en d , lo que simplifica el cálculo del término de ruptura anómalo de las identidades asociadas a la

simetría BRS para la teoría renormalizada dimensionalmente. En el apéndice B de la ref. [19] se analiza un ejemplo de dependencia explícita en $d - 4$ en estas transformaciones BRS.

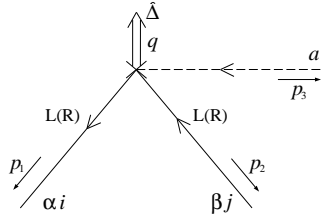
La parte fermiónica del lagrangiano clásico regularizado dimensionalmente tiene la siguiente forma no invariante bajo las transformaciones “gauge”:

$$\begin{aligned} & \frac{i}{2} \bar{\psi}_L \overleftrightarrow{D}_L \psi_L + \frac{i}{2} \bar{\psi}'_R \overleftrightarrow{D}_R \psi'_R + \frac{i}{2} \bar{\psi}_R \overleftrightarrow{\partial} \psi_R + \frac{i}{2} \bar{\psi}'_L \overleftrightarrow{\partial} \psi'_L \\ & + \frac{i}{2} \bar{\psi}_R \overleftrightarrow{\partial} \psi_R + \frac{i}{2} \bar{\psi}_L \overleftrightarrow{\partial} \psi_L + \frac{i}{2} \bar{\psi}'_L \overleftrightarrow{\partial} \psi'_L + \frac{i}{2} \bar{\psi}'_R \overleftrightarrow{\partial} \psi'_R. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por tanto, S_0 no es invariante bajo las transformaciones BRS, proviniendo el término de ruptura, $s_d S_0$, de los cuatro últimos términos de la ec. (3.12):

$$\begin{aligned} s_d S_0 &= s_d \int d^d x \frac{i}{2} \bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu P_L \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi} P_R \hat{\gamma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi + \frac{i}{2} \bar{\psi}' \hat{\gamma}^\mu P_R \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi' + \frac{i}{2} \bar{\psi}' P_L \hat{\gamma}^\mu \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi' \\ &= \int d^d x \frac{1}{2} \omega^a \left\{ \bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 T_L^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi + \partial_\mu (\bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu T_L^a \psi) - \bar{\psi}' \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 T_R^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi' + \partial_\mu (\bar{\psi}' \hat{\gamma}^\mu T_R^a \psi') \right\} \\ &\equiv \hat{\Delta} \equiv \int d^d x \hat{\Delta}(x). \end{aligned} \quad (3.13)$$

La regla de Feynman de la inserción de este término de ruptura anómalo se da en la figura 1. De aquí en adelante, se denotará en las figuras al fermión que interacciona de forma “levógira” (“dextrógira”) con el subíndice L(R).



$$\begin{aligned} & \equiv \tilde{\Gamma}_{\psi^{(r)} \bar{\psi}^{(r)} \omega; \hat{\Delta}}^{\beta \alpha, a}(p_1, p_2; q) = \\ & = \frac{i}{2} [T_{L(R)}^a]_{ij} [+(-)(\hat{p}_2 - \hat{p}_1) \gamma_5 + (\hat{p}_1 + \hat{p}_2)] \Big|_{\alpha \beta} \end{aligned}$$

Figura 1. Regla de Feynman de la inserción del término de ruptura no integrado de la ec. (3.13)

Nótese que si la(s) representación(es) fueran compatibles con una invariancia discreta CP de la acción clásica, entonces la acción regularizada dimensionalmente mediante esta elección del vértice quiral también sería formalmente invariante bajo CP, y el término de ruptura o ec. (3.13) tendría un valor definido de la simetría CP (+1 si se elige $(\omega_{L(R)})' = -(\omega_{L(R)})^t$, -1 si se elige $(\omega_{L(R)})' = (\omega_{L(R)})^t$, donde $\omega_{L(R)} \equiv \omega^a T_{L(R)}^a$ y t denotan la transposición de las matrices de color). Es decir, que la regularización elegida tiene la propiedad importante de preservar la simetría discreta CP.

El término de ruptura es un objeto en “ $(d - 4)$ dimensiones” (de forma implícita), es decir un operador evanescente, lo que sería cierto para cualquier otra elección de la

acción clásica regularizada. Por ejemplo, si se hubiera elegido como regularización de la interacción el siguiente vértice

$$\bar{\psi}\gamma^\mu P_L T_L^a \psi A_\mu^a + \bar{\psi}'\gamma^\mu P_R T_R^a \psi' A_\mu^a, \quad (3.14)$$

entonces el término de ruptura sería

$$\begin{aligned} \int d^d x \frac{1}{2} \omega^a \Big\{ & \bar{\psi}\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 T_L^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi + \partial_\mu (\bar{\psi}\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 T_L^a \psi) - \bar{\psi}'\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 T_R^a \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi' - \partial_\mu (\bar{\psi}'\hat{\gamma}^\mu \gamma_5 T_R^a \psi') \Big\} \\ & - c^{abc} \omega^b (\bar{\psi}\hat{\gamma}^\mu P_L T_L^a \psi + \bar{\psi}'\hat{\gamma}^\mu P_R T_R^a \psi') A_\mu^c \\ & + i\omega^b (\bar{\psi}\hat{\gamma}^\mu P_L T_L^c T_L^b \psi + \bar{\psi}'\hat{\gamma}^\mu P_R T_R^c T_R^b \psi') A_\mu^c, \end{aligned} \quad (3.15)$$

que parece más complicado. Además con este vértice, no se preservaría la posible invariancia bajo la simetría discreta CP.

Recuérdese que en la prescripción de Breitenlohner y Maison $\bar{\gamma}^\mu$ anticonmuta con γ_5 , mientras que $\hat{\gamma}^\mu$ conmuta. por lo que, en general, las manipulaciones algebraicas de las cadenas de matrices de Dirac serían un poco más tediosas con el segundo tipo de vértice que con el primero ($\gamma^\mu = \bar{\gamma}^\mu + \hat{\gamma}^\mu$).

Nótese que como los dos vértices son diferentes, los resultados obtenidos por substracción mínima también pueden ser diferentes, es decir conducir a *dos esquema de renormalización diferentes* que se diferenciarían, orden a orden en potencias de \hbar , por la adición de contratérminos finitos. Más aún, en general, sería de esperar que ambos resultados fueran diferentes de los obtenidos con la habitual prescripción “naive” que utiliza una matriz γ_5 anticonmutante en cada diagrama que contenga un “loop” fermiónico. El vértice “hermítico” de la ref. [96] no sólo no es el único correcto como en la citada referencia se asegura, sino que también lo es cualquier otro que difiera de él en un operador evanescente de dimensión de masas igual o menor que 4 como se recalca correctamente en [98]. Además *ninguno* de estos vértices será invariante bajo las transformaciones quirales BRS.

El hecho de que el vértice no sea invariante bajo las transformaciones BRS tiene como consecuencia directa que el funcional 1PI regularizado dimensionalmente y calculado con los diagramas generados por la acción de partida S_0 , y que denotaremos por Γ_0 , no satisface las identidades de Slavnov-Taylor, que representan la simetría BRS a nivel cuántico, sino que se reduce a la identidad con un término de ruptura dado por el lado derecho de la ec. (2.18), si bien simplificado a la inserción en Γ_0 del operador $\hat{\Delta}$ de la ec. (3.13) por no haberse añadido ningún contratérmino finito.

3.3. Los contratérminos singulares a un “loop”

Sea $\Gamma_{0\text{sing}}^{(1)}$ la parte singular o divergente de un “loop” en $4-d$ de Γ_0 , el funcional 1PI regularizado dimensionalmente y obtenido a partir de las reglas de Feynman de la acción S_0 de la ec. (3.11). Entonces, por definición de los contratérminos singulares o “infinitos” necesarios para cancelar la divergencia,

$$S_{\text{sct}}^{(1)} = -\Gamma_{0\text{sing}}^{(1)}. \quad (3.16)$$

En la ref. [19] se calculó $\Gamma_{0\text{sing}}^{(1)}$ con el resultado, si $\varepsilon \equiv 4-d$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\text{sing}}^{(1)} = & \frac{\hbar}{\varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left\{ -C_A \left[\frac{10}{3} + (1-\alpha') \right] S_{0AA} + \frac{8}{3} \frac{T_{L+R}}{2} \bar{S}_{0AA} \right. \\ & - C_A \left[\frac{4}{3} + \frac{3}{2}(1-\alpha') \right] S_{0AAA} + \frac{8}{3} \frac{T_{L+R}}{2} \bar{S}_{0AAA} \\ & - C_A \left[-\frac{2}{3} + 2(1-\alpha') \right] S_{0AAAA} + \frac{8}{3} \frac{T_{L+R}}{2} \bar{S}_{0AAAA} \\ & + C_L 2\alpha' \bar{S}_{0\bar{\psi}\psi} + C_R 2\alpha' \bar{S}_{0\bar{\psi}'\psi'} \\ & + \left[\left(2 - \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A + 2\alpha' C_L \right] \bar{S}_{0\bar{\psi}\psi A} \\ & + \left[\left(2 - \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A + 2\alpha' C_R \right] \bar{S}_{0\bar{\psi}'\psi' A} \\ & - \left(1 + \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A S_{0\bar{\omega}\omega} + \alpha' C_A S_{0\bar{\omega}\omega A} \\ & + \alpha' C_A [S_{0\bar{L}s\psi} + S_{0\bar{R}s\psi'} + S_{0Ls\bar{\psi}} + S_{0Rs\bar{\psi}'}] \\ & - \left(1 + \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A S_{0\rho\omega} + \alpha' C_A S_{0\rho\omega A} \\ & \left. + \alpha' C_A S_{0\zeta\omega\omega} \right\} \\ & + \frac{\hbar}{\varepsilon} \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_{L+R}}{2} \frac{4}{3} \int d^d x \frac{1}{2} \bar{A}_\mu \hat{\square} \bar{A}^\mu, \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde los términos S_{0X} son los términos correspondientes términos de la parte independiente de α de la acción clásica regularizada dimensionalmente S_0 . La barra de algunos términos denota que todos sus índices están “barrados”, es decir, contraídos con la métrica $\bar{g}^{\mu\nu}$.

Definamos el operador lineal b_d de BRS en regularización dimensional como sigue

$$b_d \equiv s_d + \int d^d x \left\{ \text{Tr} \frac{\delta S_0}{\delta A_\mu} \frac{\delta}{\delta \rho^\mu} + \text{Tr} \frac{\delta S_0}{\delta \omega} \frac{\delta}{\delta \zeta} + \right.$$

$$+ \frac{\delta S_0}{\delta \psi} \frac{\delta}{\delta \bar{L}} + \frac{\delta S_0}{\delta \psi'} \frac{\delta}{\delta \bar{R}} + \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}} \frac{\delta}{\delta L} + \frac{\delta S_0}{\delta \bar{\psi}'} \frac{\delta}{\delta R} \Big\}, \quad (3.18)$$

Nótese que $b_d^2 \neq 0$ ya que $s_d S_0 \neq 0$. La acción de s_d sobre los campos es la misma que la que se introdujo en la ec. (3.7). Si se define en el espacio de “ d dimensiones” de la regularización dimensional los siguientes polinomios en campos integrados

$$\begin{aligned} L_g &\equiv \frac{1}{2g^2} \int d^d x \operatorname{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} = g \frac{\partial}{\partial g} S_0, & \bar{L}_g &= \frac{1}{2g^2} \int d^d x \operatorname{Tr} \bar{F}_{\mu\nu} \bar{F}^{\mu\nu}, \\ L_{\psi^{(l)}}^{\text{L(R)}} &\equiv -b_d \cdot \int d^d x \{ \bar{L}(\bar{R}) P_{\text{L(R)}} \psi^{(l)} + \bar{\psi}^{(l)} P_{\text{R(L)}} L(R) \} = \left(N_{\psi}^{\text{L(R)}} - N_{L(R)} \right) S_0 = \\ &= 2 \int d^d x \left\{ \frac{i}{2} \bar{\psi}^{(l)} \overleftrightarrow{\not{D}} P_{\text{L(R)}} \psi^{(l)} + \bar{\psi}^{(l)} \bar{\gamma}^\mu P_{\text{L(R)}} T_{\text{L(R)}}^a \psi^{(l)} A_\mu^a \right\}, \\ \bar{L}_{\psi^{(l)}}^{\text{L(R)}} &\equiv L_{\psi^{(l)}} - \int d^d x i \bar{\psi}^{(l)} \overleftrightarrow{\not{D}} P_{\text{L(R)}} \psi^{(l)} = 2 \int d^d x \left\{ \frac{i}{2} \bar{\psi}^{(l)} \overleftrightarrow{\not{D}} P_{\text{L(R)}} \psi^{(l)} + \bar{\psi}^{(l)} \bar{\gamma}^\mu P_{\text{L(R)}} T_{\text{L(R)}}^a \psi^{(l)} A_\mu^a \right\}, \\ L_A &\equiv b_d \cdot \int d^d x \hat{\rho}_\mu^a A^{a\mu} = \left(\operatorname{Tr} [N_A - N_\rho - N_B - N_{\bar{\omega}}] + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \right) S_0, \\ L_\omega &\equiv -b_d \cdot \int d^d x \zeta^a \omega^a = \operatorname{Tr} [N_\omega - N_\zeta] S_0, \end{aligned} \quad (3.19)$$

donde

$$\begin{aligned} N_\phi &\equiv \int d^d x \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(x)}, & \phi &= A_\mu, \rho_\mu, B, \bar{\omega}, \omega \text{ y } \zeta, \\ N_\psi^{\text{L(R)}} &\equiv \int d^d x (P_{\text{L(R)}} \psi)_\beta \frac{\delta}{\delta \psi_\beta}, & N_{\psi'}^{\text{R(L)}} &\equiv \int d^d x (P_{\text{R(L)}} \psi')_\beta \frac{\delta}{\delta \psi'_\beta}, \\ N_{\bar{\psi}}^{\text{R(L)}} &\equiv \int d^d x (\bar{\psi} P_{\text{R(L)}})_\beta \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}_\beta}, & N_{\bar{\psi}'}^{\text{L(R)}} &\equiv \int d^d x (\bar{\psi}' P_{\text{L(R)}})_\beta \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}'_\beta}; \end{aligned} \quad (3.20)$$

entonces, el funcional $\Gamma_{0\text{sing}}^{(1)}$ de la ec. (3.17) puede ponerse en la forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_{0\text{sing}}^{(1)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \frac{\hbar}{\varepsilon} \left[\frac{11}{3} C_A L_g + \left(2 - \frac{1-\alpha'}{2} \right) C_A L_A + \alpha' C_A L_\omega \right] \\ &+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \frac{\hbar}{\varepsilon} \left[-\frac{4}{3} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} \bar{L}_g + \alpha' C_L \bar{L}_\psi + \alpha' C_R \bar{L}_{\psi'} \right] \\ &+ \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{\hbar}{\varepsilon} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} \frac{4}{3} \int d^d x \frac{1}{2} \bar{A}_\mu \hat{\square} A^\mu; \end{aligned} \quad (3.21)$$

es decir, $b_d \Gamma_{0\text{sing}}^{(1)} = O(\hat{g}_{\mu\nu})$.

La segunda y tercera líneas de la ecuación anterior muestran de forma explícita que la renormalización “infinita” multiplicativa habitual de la constante de acoplamiento g y de los campos de S_0 se ha perdido ya incluso en la aproximación de un “loop”.

Por supuesto, para resolver el problema del cálculo de los contratérminos finitos que restauran la simetría BRS si la teoría tiene cancelación de anomalías no es necesario calcular esta contribución singular (como se vio en los pasos enumerados en la sección 2.7). Se ha realizado este cálculo para ver de forma directa como la parte singular no es compatible con la simetría BRS, lo que implicaría una renormalización multiplicativa.

3.4. Términos de ruptura de la simetría BRS

Los *principios de acción cuántica regularizada*, comentados en la sección 2.3. conducen sin ningún tipo de ambigüedades (véase el apéndice A) a la siguiente identidad anómala de BRS

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_d(\Gamma_{\text{DReg}}) &\equiv \int d^d x \left\{ \text{Tr} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \rho^\mu} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta A_\mu} + \text{Tr} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \zeta} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \omega} + \text{Tr} B \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \bar{\omega}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \bar{L}} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \psi} + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \bar{R}} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \psi'} + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta L} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta R} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \bar{\psi}'} \right\} = \\ &= \hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + [b_d S_{\text{ct},n}] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + \int d^d x \sum_{\Phi} \left\{ \left[\frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_{\Phi}(x)} \frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta \Phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right\}, \quad (3.22) \end{aligned}$$

si se aplica al funcional generador 1PI regularizado dimensionalmente, Γ_{DReg} , obtenido a partir de la acción regularizada dimensionalmente $S_{\text{DReg},n} = S_0 + S_{\text{ct},n}$, con $S_{\text{ct},n} = \sum_{m=1}^n \hbar^m S_{\text{ct}}^{(m)}$ y donde consideramos que $S_{\text{ct}}^{(m)}$ incluye tanto contratérminos finitos como singulares. Los símbolos Φ y K_{Φ} de la ecuación anterior representan, respectivamente cualquier campo que tenga una transformación BRS no lineal, es decir, A_μ , ω , ψ , ψ' , $\bar{\psi}$ y $\bar{\psi}'$ y el campo externo al que se acopla la respectiva variación de BRS, es decir, ρ_μ , ζ , \bar{L} , \bar{R} , L , y R . El operador $\hat{\Delta}$ viene dado por la ec. (3.13).

La ec. (3.22) es un caso particular de la ec. (2.18), y se obtiene considerando una realización concreta de las transformaciones BRS en regularización dimensional dadas por la ec. (3.7). Esta ecuación es rigurosa y válida en todos los órdenes del desarrollo en potencias de \hbar y campos.

Nótese que Γ_{DReg} no conserva la simetría BRS ya que $\mathcal{S}_d(\Gamma_{\text{DReg}})$ no se anula. Por supuesto, el lado derecho de la ec. (3.22) no vale cero. Este término es el término de ruptura de la simetría en la teoría regularizada dimensionalmente definida por la acción $S_{\text{DReg},n}$.

Particularizando las ecs. (2.17)–(2.22) para el caso de la teoría de campos en estudio, se concluye que la siguiente ecuación, que es la contrapartida renormalizada de la ec. (3.22), es válida hasta orden \hbar^n :

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma_{\text{ren}}) &\equiv \int d^4 x \left\{ \text{Tr} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \rho^\mu} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta A_\mu} + \text{Tr} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \zeta} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \omega} + \text{Tr} B \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \bar{\omega}} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \bar{L}} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \psi} + \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \bar{R}} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \psi'} + \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta L} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \bar{\psi}} + \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta R} \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta \bar{\psi}'} \right\} = \Delta_{\text{ruptura}}, \quad (3.23) \end{aligned}$$

donde Γ_{ren} es el funcional 1PI renormalizado dimensionalmente. El término de ruptura de la simetría BRS, Δ_{ruptura} , viene dado hasta el orden \hbar^n por el “límite” $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$ del lado derecho de la ec. (3.22).

Las ecs. (2.24)-(2.26) generales, obtenidas en el capítulo anterior, nos permiten concluir

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{ruptura}}^{(1)} &= \text{LIM}_{d \rightarrow 4} \left\{ \left[\hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{\text{singular}}^{(1)} + b_d S_{\text{sct}}^{(1)} \right\} + \left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)} + b S_{\text{fct}}^{(1)} \\ &= \left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)} + b S_{\text{fct}}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\hat{\Delta}$, b_d y b se definen en las ecs. (3.13), (3.18) y (3.9), respectivamente, y donde, como siempre, seguimos denominando $S_{\text{fct}}^{(1)}$ al $\text{LIM}_{d \rightarrow 4} S_{\text{fct}}^{(1)}$, ya que no hay peligro de confusión entre las expresiones renormalizadas en 4 dimensiones y las regularizadas en “ d dimensiones”. Se presentará más adelante el cálculo explícito de la inserción regularizada del término de ruptura que demuestra que

$$\begin{aligned} \left[\hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{\text{singular}}^{(1)} &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} \frac{4}{3} \frac{\hbar}{\varepsilon} \times \\ &\int d^d x \omega^a \{ \hat{\square} \bar{\partial}_\mu \bar{A}^{\mu a} + c^{abc} (\hat{\square} \bar{A}_\mu^a) \bar{A}^{\mu b} \} = -b_d S_{\text{sct}}^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

La contribución singular (polo) de orden \hbar , $\left[\hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{\text{singular}}^{(1)}$, a $\Delta \cdot \Gamma_{\text{DReg}}$ proviene únicamente de los diagramas dibujados en las figs. 1 y 2 del apéndice B, si se reemplaza $\check{\Delta}$ con $\hat{\Delta}$ en las figuras. Estas contribuciones son

$$\begin{aligned} \left[\left[\hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{Aw}^{\mu ba} \right]_{\text{singular}}^{(1)}(p) &= \frac{i}{(4\pi)^2} T_{\text{L+R}} \delta^{ab} \frac{2}{3} \frac{1}{\varepsilon} \bar{p}^\mu \hat{p}^2; \\ \left[\left[\hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{AAw}^{\mu\nu bca} \right]_{\text{singular}}^{(1)}(p_1, p_2) &= \frac{i}{(4\pi)^2} i c^{abc} \frac{4}{3} \frac{1}{\varepsilon} (\hat{p}_1^2 - \hat{p}_2^2) \bar{g}^{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Ahora bien, $b_d L_g = b_d L_A = b_d L_\omega = b_d \bar{L}_g = b_d \bar{L}_{\psi^{(r)}} = 0$, y por tanto la única variación bajo b_d de $\Gamma_{0\text{sing}}^{(1)}$ que no se anula procede de la tercera línea de la ec. (3.21), que resulta coincidir con la ec. (3.26). Como se elige $S_{\text{sct}}^{(1)} = -\Gamma_{0\text{sing}}^{(1)}$ queda comprobado de forma explícita en este modelo que la ec. (2.25), $\left[s_d S_0 \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right]_{\text{singular}}^{(1)} = -b_d S_{\text{sct}}^{(1)}$, es cierta.

La siguiente tarea que afrontar es el cálculo a orden \hbar de la contribución de la inserción anómala $N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}}$. Se realizará dicho cálculo en la siguiente sección. El cálculo se ve simplificado si se tiene en cuenta que el campo B , que sirve para imponer la condición de fijación del “gauge”, no tiene dinámica ni tiene vértices de interacción a menos que se introduzca a mano en una elección de los contratérminos finitos $\hbar^m S_{\text{fct}}^{(m)}$. Por tanto, resulta muy conveniente imponer que los contratérminos finitos sean independientes de B , de tal

forma que la contribución a Γ_{DReg} dependiente de B sea la de partida de orden \hbar^0 dada por la acción S_0 de la ec. (3.11). Así la ecuación denominada de fijación del “gauge”

$$\mathcal{B}(\Gamma_{\text{ren}}) \equiv \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}}{\delta B} - \partial_\mu A^\mu - \alpha B = 0, \quad (3.27)$$

se satisface en la teoría renormalizada. Nótese que la ec. (3.27) facilita la restauración de la simetría BRS ya que Δ_{ruptura} ni los vértices de la acción dimensionalmente regularizada (con los contratérminos finitos incluidos) dependen de B . Por supuesto, la ec. (3.27) es la ecuación de movimiento de B .

Por último, la ecuación de los fantasmas es otra ecuación interesante. Es justo la ecuación de movimiento de $\bar{\omega}$:

$$\mathcal{G} \Gamma_{\text{ren}} \equiv \left\{ \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \rho_\mu} \right\} \Gamma_{\text{ren}} = 0, \quad (3.28)$$

y es una consecuencia de la ec. (3.23) y la ecuación de fijación del “gauge”. Mediante diferenciación funcional y el hecho de que el término de ruptura de la identidad STI Δ_{ruptura} no depende de B lleva a la ec. (3.28), ecuación que por los principios de acción cuántica sabemos que se cumple directamente en la teoría renormalizada si la acción regularizada (con contratérminos) depende de ρ_μ y $\bar{\omega}$ solamente a través de la combinación $\tilde{\rho}_\mu = \rho_\mu + \partial_\mu \bar{\omega}$. Por tanto, esta simplificación se aplica a cada término de $S_{\text{ct},n}$ y de la ec. (3.22).

3.5. Desarrollo de la inserción del operador anómalo

La inserción del operador anómalo, $N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}}$, tiene el número de fantasmas igual a +1 y es la inserción de un operador evanescente polinómico integrado de dimensión ultravioleta igual a 4 sin índices de Lorentz libres ni del grupo gauge en el funcional generador 1PI renormalizado, Γ_{ren} . Esta inserción es un funcional de ψ , ψ' , A_μ , $\bar{\omega}$ (sólo a través de $\tilde{\rho}_\mu$), ω , pero no de B , y *también* es un funcional de los campos externos L , \bar{L} , R , \bar{R} , ρ_μ (sólo a través de $\tilde{\rho}_\mu$) y ζ . Por tanto, resulta necesario generalizar primero la ec. (2.35) de tal forma que incluya también los diagramas de Feynman con los campos externos como vértices.

Debido al conteo de potencias explícito de este modelo, sólo los diagramas sin campos externos o con sólo uno de ellos pueden ser divergentes. Considérese un diagrama con el vértice $K_\Phi s\Phi$ (Φ denota cualquier campo que tenga una transformación BRS no lineal). La regla de Feynman en el espacio de momentos de este vértice es una integración sobre un momento q' , que se absorbe en la definición de la transformación de Fourier de la función con la inserción de un operador, más los factores $\frac{i}{\hbar} \tilde{K}_\Phi(q')$ multiplicando la regla de Feynman de la inserción del operador $s\Phi$ a momento q' . La parte singular también es polinómica en q' , por tanto, puede ser desarrollada, junto con el resto de momentos, en una serie de Taylor finita en q' . Un factor de $q'^{\mu_1} \cdots q'^{\mu_s}$ junto con $\tilde{K}(q')$ conducirá a $(-i)^s \partial_{\mu_1} \cdots \partial_{\mu_s} K_\Phi(x)$ que multiplica la inserción del operador monomio obtenido con el

resto de momentos. Por tanto, las identidades de Bonneau (ec. (2.35)) se generalizan a:

$$\begin{aligned}
N[\hat{\Delta}](x) \cdot \Gamma_{\text{ren}} = & - \sum_{n=0}^4 \sum_{\{j_1 \dots j_n\}} \left[\sum_{r=0}^{\delta(J)} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_r\} \\ 1 \leq i_j \leq n}} \right. \\
& \left. \left\{ \frac{(-i)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial p_{i_1}^{\mu_1} \dots \partial p_{i_r}^{\mu_r}} (-i\hbar) \text{r.s.p.} \overline{\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \dots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n) N[\check{\Delta}](q = -\sum p_i) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}} \right|_{p_i=0, \check{g}=0} \right\} \\
& \times N \left[\frac{1}{n!} \prod_{k=n}^1 \left\{ \left(\prod_{\{\alpha/i_\alpha=k\}} \partial_{\mu_\alpha} \right) \phi_{j_k} \right\} \right] (x) \cdot \Gamma_{\text{ren}} + \\
& + \sum_{\Phi} \sum_{\substack{s,t \\ 0 \leq s+t \leq \delta(J;\Phi)}} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_s\} \\ 1 \leq i_j \leq n}} \left\{ \frac{(-i)^{s+t}}{(s+t)!} \frac{\partial^{s+t}}{\partial p_{i_1}^{\mu_1} \dots \partial p_{i_s}^{\mu_s} \partial p_{n+1}^{\nu_1} \dots \partial p_{n+1}^{\nu_t}} \right. \\
& \left. \text{r.s.p.} \overline{\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \dots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n); N[s\Phi](p_{n+1}) N[\check{\Delta}](q = -\sum p_i) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}} \right|_{p_i=0, \check{g} \equiv 0} \left. \right\} \\
& \times (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_t} K_\Phi)(x) N \left[\frac{1}{n!} \prod_{k=n}^1 \left\{ \left(\prod_{\{\alpha/i_\alpha=k\}} \partial_{\mu_\alpha} \right) \phi_{j_k} \right\} \right] (x) \cdot \Gamma_{\text{ren}} \quad \left. \right], \quad (3.29)
\end{aligned}$$

donde $J \equiv \{j_1, \dots, j_n\}$ y los índices j_k , $k = 1, \dots, n$ etiquetan los diferentes tipos de campos cuánticos, donde ha de tenerse en cuenta que los campos que tengan diferentes valores de los índices del grupo de “gauge” se toman como diferentes. Los símbolos $\delta(J)$, $\delta(J; \Phi)$ denotan, respectivamente, los grados superficiales de divergencia ultravioleta de las funciones 1PI $\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \dots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n) N[\check{\Delta}](q = -\sum p_i) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}$ y $\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \dots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n); N[s\Phi](p_{n+1}) N[\check{\Delta}](q = -\sum p_i) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}$. Nótese que dado que todos los propagadores corresponden a campos sin masa, la única contribución no nula al lado izquierdo de la ec. (3.29) proviene de $r = \delta(J)$ y $s + t = \delta(J; \Phi)$. $\prod_{k=n}^1$ significa que los campos en el producto se ordenan de izquierda a derecha según los valores decrecientes de k .

La fórmula anterior da lugar a un desarrollo de $N[\hat{\Delta}](x) \cdot \Gamma_{\text{ren}}$ en términos tanto de monomios integrados “normales” como de monomios integrados evanescentes [106,107] (véase la sección 2.6.). Si designamos los monomios genéricamente por la letra \mathcal{M} , el desarrollo tendrá la siguiente forma

$$\begin{aligned}
N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} &= \int d^4x N[\hat{\Delta}](x) \cdot \Gamma_{\text{ren}} \\
&= \sum_i \beta_i^{abc\dots} N[\mathcal{M}_i^{abc\dots}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} + \sum_j \hat{\beta}_j^{abc\dots} N[\hat{\mathcal{M}}_j^{abc\dots}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \\
&= \sum_i \bar{\beta}_i^{abc\dots} N[\bar{\mathcal{M}}_i^{abc\dots}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} + \sum_j \hat{\beta}_j^{abc\dots} N[\hat{\mathcal{M}}_j^{abc\dots}] \cdot \Gamma_{\text{ren}}, \quad (3.30)
\end{aligned}$$

siendo cada coeficiente una serie formal en \hbar (que empieza en el orden \hbar^1). Las letras latinas abc representan los índices del grupo de “gauge”. Se asumirá que hay una suma sobre los índices repetidos del grupo. Los monomios de la ec. (3.30) no tiene índices de Lorentz libres. Los objetos $\{\bar{\mathcal{M}}_i^{abc\dots}\}$, que denominados monomios “barrados”, son monomios donde todas las contracciones de Lorentz se han llevado a cabo con $\bar{g}^{\mu\nu}$. Nótese que existe una correspondencia uno a uno entre $\{\mathcal{M}_i^{abc\dots}\}$ y $\{\bar{\mathcal{M}}_i^{abc\dots}\}$. Los objetos $\{\hat{\mathcal{M}}_i^{abc\dots}\}$, que se denominarán monomios “con gorro”, son operadores evanescentes. Por supuesto, según se exprese el resultado de los diagramas en términos de $g^{\mu\nu}$ y de $\hat{g}^{\mu\nu}$ o de $\bar{g}^{\mu\nu}$ y de $\hat{g}^{\mu\nu}$ se llegará a la primera línea o la segunda, respectivamente, de la ec. (3.30).

Nótese que en nuestro caso los monomios son funcionales locales integrados de los campos y sus derivadas con número de fantasmas igual a 1 y dimensión ultravioleta igual a 4.

Si se desarrolla de la misma forma todas las inserciones normales de los monomios evanescentes $\hat{\mathcal{M}}_i^{abc\dots}$ en el lado derecho de la ec. (3.30) y se resuelve el sistema de identidades de Bonneau, se consigue finalmente el auténtico desarrollo de las inserciones anómalas en términos de una base de operadores no evanescentes (“normales” o “barrados”, según se desee) linealmente independientes en el espacio de inserciones renormalizadas:

$$\begin{aligned} N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} &= \sum_i k_i^{abc\dots} N[\mathcal{M}_i^{abc\dots}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \\ &= \sum_i \bar{k}_i^{abc\dots} N[\bar{\mathcal{M}}_i^{abc\dots}] \cdot \Gamma_{\text{ren}}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Se abreviará $\int d^d x$ por \int . La lista de monomios integrados con número de fantasmas igual a 1, dimensión ultravioleta igual a 4 y sin índices de Lorentz libres que pueden ser generados a un “loop” mediante la fórmula de Bonneau (3.29) es la siguiente:

* a) *Monomios con 1 ω y 1 A*

$$\mathcal{M}_1^{ab} \equiv \int d^d x \, \omega^a \square \partial_\mu A^{b\mu}.$$

* b) *Monomios con 1 ω y 2 A y sin el tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$*

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2^{abc} &\equiv \int \omega^a (\square A_\mu^b) A^{c\mu}, & \mathcal{M}_3^{abc} &\equiv \int \omega^a (\partial_\mu A_\nu^b) (\partial^\mu A^{c\nu}) = \mathcal{M}_3^{acb}, \\ \mathcal{M}_4^{abc} &\equiv \int \omega^a (\partial_\mu \partial_\nu A^{b\mu}) A^{c\nu}, & \mathcal{M}_5^{abc} &\equiv \int \omega^a (\partial_\mu A^{b\mu}) (\partial_\nu A^{c\nu}) = \mathcal{M}_5^{acb}, \\ \mathcal{M}_6^{abc} &\equiv \int \omega^a (\partial_\mu A_\nu^b) (\partial^\nu A^{c\mu}) = \mathcal{M}_6^{acb}. \end{aligned}$$

* c) *Monomios con 1 ω y 3 A y sin el tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$*

$$\mathcal{M}_7^{abcd} \equiv \int \omega^a (\partial_\mu A^{b\mu}) A_\nu^c A^{d\nu} = \mathcal{M}_7^{abdc}, \quad \mathcal{M}_8^{abcd} \equiv \int \omega^a (\partial_\mu A_\nu^b) A^{c\mu} A^{d\nu}.$$

* d) *Monomios con 1 ω y 4 A y sin el tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$*

$$\mathcal{M}_9^{abcde} \equiv \int \omega^a A_\mu^b A^{c\mu} A_\nu^d A^{e\nu} = \mathcal{M}_9^{acbde} = \mathcal{M}_9^{abced} = \mathcal{M}_9^{adebc}.$$

Como las fórmulas con los fermiones ψ y ψ' son muy parecidas, las agrupamos en una forma sencilla de interpretar. En general, se denotará con la letra L o R las líneas

o “loops” fermiónicas en los diagramas de Feynman, sus monomios, sus coeficientes, etc., correspondientes a los fermiones ψ , cuya interacción sea de forma “levógira”, o los fermiones ψ' , cuya interacción sea de forma “dextrógira”.

* e) *Monomios con 1 ω y $\psi, \bar{\psi}$ ($\psi', \bar{\psi}'$)*

$$\mathcal{M}_{10L(R)}^{a,ij} \equiv \int \omega^a \bar{\psi}_i^{(l)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} \partial_\mu \psi_j^{(l)}, \quad \mathcal{M}_{11L(R)}^{a,ij} \equiv \int \omega^a (\partial_\mu \bar{\psi}_i^{(l)}) \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} \partial_\mu \psi_j^{(l)},$$

i, j denotan los índices del grupo de los campos fermiónicos correspondientes.

* f) *Monomios con 1 ω , 1 A y $\psi, \bar{\psi}$ ($\psi', \bar{\psi}'$)*

$$\mathcal{M}_{12L(R)}^{ab,ij} \equiv \int \omega^a \bar{\psi}_i^{(l)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} \psi_j^{(l)} A_\mu^b.$$

* g) *Monomios con fermiones y campos externos*

$$\mathcal{M}_{14L(R)}^{ab,ij} \equiv \int \omega^a \omega^b \bar{L}_i(R_i) P_{L(R)} \psi_j^{(l)}, \quad \mathcal{M}_{15L(R)}^{ab,ij} \equiv \int \omega^a \omega^b \bar{\psi}_i^{(l)} P_{R(L)} L_j(R_j)$$

No se han considerado operadores como $\omega^a \bar{\psi}_i \bar{\gamma}^\mu P_R \partial_\mu \psi_j$ como monomios admisibles ya que no serán generados por las identidades de Bonneau debido a la forma elegida del vértice fermiónico regularizado a orden \hbar^0 .

Se adoptará la notación de que cuando $\{\dots\}$ agrupe índices se representa una simetrización y $[\dots]$, una antisimetrización.

* h) *Monomios con $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$*

$$\mathcal{M}_{50}^{abc} \equiv \int \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \omega^a (\partial^\alpha A^{b\mu}) (\partial^\beta A^{c\nu}) = \mathcal{M}_{50}^{acb}, \mathcal{M}_{51}^{abcd} \equiv \int \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} \omega^a (\partial^\alpha A^{b\mu}) A^{c\nu} A^{d\rho} = -\mathcal{M}_{51}^{abdc},$$

$$\mathcal{M}_{52}^{abc} \equiv \int \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \omega^a A^{b\mu} A^{c\nu} A^{d\rho} A^{e\lambda} = \mathcal{M}_{52}^{[bcde]};$$

* i) *Monomios con $\tilde{\rho}$ y ζ*

Nótese que es posible construir otros monomios con número de fantasmas igual a +1 y dimensión 4; $\tilde{\rho}_\mu^a \omega^b \omega^c A^{d\mu}$, $\tilde{\rho}_\mu^a (\partial^\mu \omega^b) \omega^c$, $\zeta^a \omega^b \omega^c \omega^d$. Las fórmulas para sus coeficientes en el desarrollo de Bonneau se obtienen fácilmente, pero no se escriben porque en el cálculo a un “loop” todos estos coeficientes resultan ser cero. Esto está claro ya que todas las funciones 1PI que habría que calcular tienen al menos dos “loops”.

* *Monomios anómalos, es decir con algún \hat{g}*

Tómese todos los monomios escritos hasta ahora y reescríbanse añadiendo “gorros” a los índices de Lorentz de todas las maneras posibles sin que aparezca un índice con “gorro” contraído con el tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$, porque esta contracción daría 0. Nótese que por haber elegido los vértices fermiónicos $\bar{\psi}^{(l)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^a \psi^{(l)} A_\mu^a = \bar{\psi}^{(l)} P_{R(L)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^a \psi^{(l)} A_\mu^a$ en la acción clásica regularizada dimensionalmente S_0 , ni $\omega^a \bar{\psi}_i P_L \hat{\gamma}^\mu P_L \partial_\mu \psi_j$ ni $\omega^a \bar{\psi}_i^{(l)} P_R \hat{\gamma}^\mu P_R \partial_\mu \psi_j^{(l)}$ acontecen en el desarrollo de Bonneau que se

está considerando; sin embargo, si se hubiera elegido el vértice $\bar{\psi}^{(\iota)} \gamma^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^a \psi^{(\iota)} A_\mu^a = A_\mu^a (\bar{\psi}^{(\iota)} P_{R(L)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^a \psi^{(\iota)} + \bar{\psi}^{(\iota)} P_{L(R)} \hat{\gamma}^\mu T_{L(R)}^a P_{L(R)} \psi^{(\iota)})$, sí que lo harían.

En el apéndice B se da la fórmula, válida para todos los órdenes en \hbar de cada coeficiente $\bar{\beta}_i^{abc\dots}$ de la ec. (3.30) en términos de residuos del polo simple de diagramas 1PI concretos. Resulta muy sencillo dar las fórmulas correspondientes para los coeficientes $\hat{\beta}_i^{abc\dots}$. Además en el mismo apéndice se da el resultado para todos los coeficientes a 1 “loop”.

Del cálculo explícito de estos coeficientes se obtiene como anomalía *quiral gauge esencial y no abeliana*:

$$\begin{aligned}
& \int d^4x \{ \beta_{50}^{abc} N[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \omega^a (\partial^\alpha A^{\mu b})(\partial^\beta A^{\nu c})] + \beta_{51}^{abcd} N[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \omega^a (\partial^\alpha A^{\mu b}) A^{\nu c} A^{\rho d}] + \\
& \quad + \beta_{52}^{abcde} N[\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} \omega^a A^{\mu b} A^{\nu c} A^{\rho d} A^{\lambda e}] \} \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = \\
& = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \left\{ \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} d_{L-R}^{abc} \omega^a (\partial^\alpha A^{\mu b})(\partial^\beta A^{\nu c}) + \frac{1}{2} \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} \mathcal{D}_{L-R}^{abcd} \omega^a (\partial^\alpha A^{\mu b}) A^{\nu c} A^{\rho d} \right\} \\
& \quad + O(\hbar^2) = \\
& = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \omega^a \partial^\mu \left\{ d_{L-R}^{abc} (\partial^\nu A^{\rho b}) A^{\sigma c} + \frac{1}{6} \mathcal{D}_{L-R}^{abcd} A^{\nu b} A^{\rho c} A^{\sigma d} \right\} + O(\hbar^2) = \\
& = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}_{L-R} \left\{ \omega \partial^\mu (\partial^\nu A^\rho A^\sigma - \frac{i}{2} A^\nu A^\rho A^\sigma) \right\} + O(\hbar^2), \tag{3.32}
\end{aligned}$$

donde se ha hecho uso de las definiciones

$$\begin{aligned}
d_L^{abc} &= \text{Tr} [T_L^a \{T_L^b, T_L^c\}] = d_L^{\{abc\}}, \\
\mathcal{D}_L^{abcd} &= -i 3! \text{Tr} [T_L^a T_L^b T_L^c T_L^d] = \frac{1}{2} (d_L^{abe} c^{ecd} + d_L^{ace} c^{edb} + d_L^{ade} c^{ebc}), \tag{3.33}
\end{aligned}$$

y lo mismo para d_R^{abc} y \mathcal{D}_R^{abcd} , y $d_{L-R} \equiv d_L - d_R$, $\mathcal{D}_{L-R} \equiv \mathcal{D}_L - \mathcal{D}_R$.

Por supuesto, se escribe $O(\hbar^2)$ porque es un resultado de un cálculo a orden \hbar^1 sin ninguna hipótesis, aunque sepamos que debido al teorema de Adler-Bardeen para las teorías gauge no abelianas [18], los coeficientes β_{50}^{abc} , β_{51}^{abc} y β_{52}^{abc} deberían ser cero a órdenes superiores si ya no hay anomalía a primer orden por el mecanismo de la cancelación de anomalías. Recuérdese que en las fórmulas para los coeficientes, se supone una suma sobre las representaciones “levógira” y “dextrógira”. Por tanto, siempre puede elegirse una representación de la materia de tal forma que estos coeficientes de la anomalía esencial se anulen entre sí.

Por último, y como se explicó al final de la sección 2.6., los coeficientes k_i del auténtico desarrollo en términos de una base de inserciones cuánticas “normales” son iguales a los coeficientes β_i en la aproximación a un “loop”. Además $\bar{k}_i^{(1)} = k_i^{(1)}$.

* La expresión del término de ruptura a orden \hbar

Reuniendo todos los resultados obtenidos, se obtiene de forma completa el término de ruptura renormalizado, $\left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)}$, a orden \hbar (entiéndase este resultado como una formula en el espacio-tiempo de 4 dimensiones):

$$\begin{aligned}
\hbar^1 \left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)} = & \\
& - \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{3} \delta^{ab} \mathcal{M}_1^{ab} \hbar^1 + \\
& - \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{3} c^{abc} \mathcal{M}_2^{abc} \hbar^1 + \frac{1}{(4\pi)^2} (T_L + T_R) \frac{2}{3} c^{abc} \mathcal{M}_4^{abc} \hbar^1 + \\
& + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} [T_{L+R}^{acbd} + T_{L+R}^{adbc} - (T_L + T_R) (c^{ebc} c^{eda} + c^{ebd} c^{eca})] \mathcal{M}_7^{abcd} \hbar^1 \\
& + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} [T_{L+R}^{abcd} + T_{L+R}^{adcb} + (T_L + T_R) (c^{ebc} c^{eda} + c^{eba} c^{edc})] \mathcal{M}_8^{abcd} \hbar^1 \\
& - \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[C_L - \frac{C_A}{4} + (\alpha' - 1) \left(\frac{C_L}{6} - \frac{C_A}{4} \right) \right] (\mathcal{M}_{10L} + \mathcal{M}_{11L}) \hbar^1 \\
& - \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[C_R - \frac{C_A}{4} + (\alpha' - 1) \left(\frac{C_R}{6} - \frac{C_A}{4} \right) \right] (\mathcal{M}_{10R} + \mathcal{M}_{11R}) \hbar^1 \\
& - \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 \frac{1 + (\alpha' - 1)}{4} C_A (\mathcal{M}_{12L} - \mathcal{M}_{13L} + \mathcal{M}_{12R} - \mathcal{M}_{13R}) \hbar^1 \\
& + \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 \frac{1 + (\alpha' - 1)}{4} \frac{C_A}{8} c^{abc} (\mathcal{M}_{14L}^{abc} - \mathcal{M}_{15L}^{abc} + \mathcal{M}_{14R}^{abc} - \mathcal{M}_{15R}^{abc}) \hbar^1 \\
& + \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \int d^4x \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}_{L-R} [\omega \partial^\mu (\partial^\nu A^\rho A^\sigma - \frac{i}{2} A^\nu A^\rho A^\sigma)] \hbar^1, \quad (3.34)
\end{aligned}$$

donde se ha definido

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{10L(R)} &= (T_{L(R)}^a)^{ij} \mathcal{M}_{10L(R)}^{a,ij} = \int d^4x \omega^a \bar{\psi}^{(i)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^a \partial_\mu \psi^{(j)} \\
\mathcal{M}_{11L(R)} &= (T_{L(R)}^a)^{ij} \mathcal{M}_{11L(R)}^{a,ij} = \int d^4x \omega^a (\partial_\mu \bar{\psi}^{(i)}) \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^a \psi^{(j)} \\
\mathcal{M}_{12L(R)} &= (T_{L(R)}^a T_{L(R)}^b)^{ij} \mathcal{M}_{12L(R)}^{ab,ij} = \int d^4x \omega^a \bar{\psi}^{(i)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^a T_{L(R)}^b \psi^{(j)} A_\mu^b \\
\mathcal{M}_{13L(R)} &= (T_{L(R)}^b T_{L(R)}^a)^{ij} \mathcal{M}_{12L(R)}^{ab,ij} = \int d^4x \omega^a \bar{\psi}^{(i)} \bar{\gamma}^\mu P_{L(R)} T_{L(R)}^b T_{L(R)}^a \psi^{(j)} A_\mu^b \\
\mathcal{M}_{14L(R)}^{abc} &= (T_{L(R)}^c)^{ij} \mathcal{M}_{14L(R)}^{ab,ij} = \int d^4x \omega^a \omega^b \bar{L}(\bar{R}) P_{L(R)} T_{L(R)}^c \psi^{(j)}, \\
\mathcal{M}_{15L(R)}^{abc} &= (T_{L(R)}^c)^{ij} \mathcal{M}_{15L(R)}^{ab,ij} = \int d^4x \omega^a \omega^b \bar{\psi}^{(i)} P_{R(L)} T_{L(R)}^c L(R), \quad (3.35)
\end{aligned}$$

y se ha utilizado la ecuación siguiente:

$$-2T_{L+R}^{abcd} - 2T_{L+R}^{adcb} + T_{L+R}^{abdc} + T_{L+R}^{acbd} + T_{L+R}^{acdb} + T_{L+R}^{adbc} = (T_L + T_R) (c^{ebc} c^{eda} + c^{eba} c^{edc}). \quad (3.36)$$

Nótese que la combinación de monomios que se ha obtenido preserva la posible simetría discreta CP de la acción de partida, si bien este hecho no se ha supuesto en ningún momento del cálculo.

Se puede obtener también el resultado de la ec. (3.34) calculando el lado izquierdo de la ec. (3.34) a un “loop”, es decir, calculando la parte renormalizada de todos los posibles diagramas 1PI de un “loop” con la inserción $\hat{\Delta}$; su parte finita debe ser un término local, porque cuando se hace el límite al espacio de 4 dimensiones, todos los objetos de “ $(d-4)$ dimensiones” se fijan a 0, por lo que la única parte que queda finita de un diagrama de este tipo procede de la parte singular polinómica formada por el objeto de 4 dimensiones y un objeto de “ $(d-4)$ ” contraído que cancela la singularidad en $d-4$. Por tanto, como las funciones 1PI renormalizadas son funciones locales, existen operadores (en el espacio de 4 dimensiones) cuyas reglas de Feynman con un factor explícito \hbar^1 dan el mismo resultado. La suma de estos operadores es precisamente el lado derecho de la ec. (3.34).

De hecho, el cálculo a un “loop” de los coeficientes de las identidades de Bonneau utilizando el residuo del polo simple de los diagramas con una inserción de $\check{\Delta}$ son exactamente los mismos que la parte finita de los diagramas con la inserción de $\hat{\Delta}$, exceptuando algunos factores de los coeficientes de Bonneau que dan directamente los operadores cuyas reglas de Feynman conduce al mismo resultado.

Pero las identidades de Bonneau resuelven el problema de expresar la inserción anómala renormalizada en términos de inserciones estándares renormalizadas en cálculos de órdenes superiores de la teoría de perturbaciones y las fórmulas de los coeficientes dadas en el apéndice B serían exactamente las mismas (teniendo en cuenta a la hora de calcular las funciones 1PI, eso sí, las nuevas reglas de Feynman procedentes de los contratérminos finitos añadidos en el paso previo del proceso recursivo). Es por esta razón por la que se ha escrito de forma explícita las fórmulas de las identidades de Bonneau.

3.6. Recuperación de la simetría BRS

Es sabido gracias a la teoría de renormalización algebraica y de la cohomología de la simetría BRS [18] que existe un funcional local integrado de los campos y sus derivadas, que denominamos $X^{(1)}$, tal que la contribución anómala $\left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)}$, dada por la ec. (3.34), puede reescribirse en la forma

$$\begin{aligned} \left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \times \\ &\int d^4x \, \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}_{L-R} \left[\omega \partial^\mu (\partial^\nu A^\rho A^\sigma - \frac{i}{2} A^\nu A^\rho A^\sigma) \right] + bX^{(1)}. \end{aligned} \quad (3.37)$$

El funcional local integrado, $X^{(1)}$, tiene número de fantasmas igual a cero y dimensión ultravioleta igual a 4. Por tanto, *si se eligen* los contratérminos finitos $S_{\text{fct}}^{(1)}$ de tal forma que se verifique

$$S_{\text{fct}}^{(1)} = -X^{(1)}, \quad (3.38)$$

y se suponen incluidos en la acción regularizada de la ec. (3.24) se concluye que la identidad de BRS queda ahora “rota” a orden \hbar solamente por la anomalía “gauge” no abeliana esencial:

$$\mathcal{S}(\Gamma_{\text{ren}}) = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \int d^4x \varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \text{Tr}_{\text{L-R}} \left[\omega \partial^\mu (\partial^\nu A^\rho A^\sigma - \frac{i}{2} A^\nu A^\rho A^\sigma) \right] \hbar^1 + O(\hbar^2). \quad (3.39)$$

La ecuación anterior es el objetivo que buscábamos: si las representaciones fermiónicas satisfacen el criterio de cancelación de las anomalías, entonces la simetría BRS puede recuperarse (hasta el orden \hbar) mediante una adecuada elección de contratérminos finitos $S_{\text{fct}}^{(1)}$.

La tarea pendiente, por tanto, consiste en calcular $S_{\text{fct}}^{(1)} = -X^{(1)}$. Se exigirá que $S_{\text{fct}}^{(1)}$ no dependa de B ni de $\tilde{\rho}$. Recuérdese que estos campos no aparecen en la ec. (3.34).

La estrategia más general para esta cálculo, como ya se hizo en el estudio del desarrollo de $\left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)}$, es:

- i) Escribese la lista completa de los posibles monomios de dimensión ultravioleta igual a 4, número de fantasmas igual a 0 y sin índices de Lorentz libres, pero con índices del grupo de “gauge”. †
- ii) Escribese la expresión más general de los contratérminos finitos como una combinación lineal de esos monomios.
- iii) Hágase su variación bajo el operador lineal b .
- iv) Por último, impóngase que esta variación cancele el desarrollo del término de ruptura $\left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}} \right]^{(1)}$, exceptuando la anomalía esencial no abeliana.

Este algoritmo sistemático debe conducir a un sistema lineal compatible e indeterminado, cuyas incógnitas son los coeficientes del paso ii) y con un grado de indeterminación exactamente igual a del número de operadores invariantes bajo b en la teoría clásica.

Como escribir tal lista y tomar tales variaciones bajo b es una tarea tediosa ya que aparecerían montones de índices, y como para la resolución correcta del sistema final es esencial escribir una base de operadores linealmente independientes, lo que no es simple

† Esta lista es una lista en el espacio-tiempo de 4 dimensiones. Por supuesto, debe elegirse alguna generalización en el espacio de “ d dimensiones” cuando se escriban los monomios en la acción regularizada, pero las diferencias, siendo objetos en “ $(d - 4)$ dimensiones”, sólo producirán efectos al orden siguiente en \hbar (porque requieren que haya “loops” para que den una contribución no nula, y ya hay un factor explícito \hbar en $S_{\text{fct}}^{(1)}$)

en el caso de campos en una representación arbitraria el grupo $SU(N)$, haremos una suposición para simplificar el cálculo a un “loop”. Está claro que la estructura de grupo de los contratérminos finitos que son necesarios en el cálculo a un “loop” para recuperar la simetría BRS no es arbitraria. Un “ansatz” natural consiste en tomar las estructuras de grupo que pueden aparecer en el cálculo de diagramas de Feynman a 1 “loop”. Por tanto, escribimos

$$\begin{aligned}
S_{\text{fct}}^{(1)} = & a_1 \int (\partial_\mu A^\mu)^2 + a_2 \int A_\mu \square A^\mu + c \int i c^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} \\
& + (d_L d_L^{abc} + d_R d_R^{abc}) \int (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} + (f_L T_L^{abcd} + f_R T_R^{abcd}) \int A^{a\mu} A_\mu^b A^{c\nu} A_\nu^d \\
& + e c^{abc} c^{ade} \int A^{b\mu} A^{c\nu} A_\mu^d A_\nu^e + n_L \int \frac{i}{2} \bar{\psi} \gamma^\mu P_L \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi + n_R \int \frac{i}{2} \bar{\psi}' \gamma^\mu P_R \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi' \\
& + p_L \int \bar{\psi} \gamma^\mu P_L T_L^a \psi A_\mu^a + p_R \int \bar{\psi}' \gamma^\mu P_R T_R^a \psi' A_\mu^a \\
& + \int [u_{1L} \bar{L} s \psi + u_{1R} \bar{R} s \psi' + u_{2L} L s \bar{\psi} + u_{2R} R s \bar{\psi}']
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Nótese que debido a las razones apuntadas antes, no se han escrito términos dependientes de ρ o $\bar{\omega}$.

Más aún, conocemos las combinaciones de términos, dados por la ec. (3.10), que son invariantes bajo b . Resulta obvio que estas combinaciones no son relevantes para este cálculo. Por tanto, podemos reducir la base de los posibles contratérminos finitos a un número mínimo. L_A y L_ω contienen $\tilde{\rho}^\mu$, que acabamos de suponer que no aparecerían en los contratérminos finitos, es decir no pueden ser utilizados otra vez para reducir el número de contratérminos finitos. Pero, utilizando L_g puede imponerse $e = 0$ y por $L_{\psi^{(i)}}$ podemos imponer $p_{L(R)} = 0$, sin pérdida de ninguna generalidad. En ese caso, debería haber una solución *única* al problema de cancelar las anomalías espurias en términos del resto de variables $a_1, a_2, c, d_{L(R)}, f_{L(R)}, n_{L(R)}, u_{1L(R)}$ y $u_{2L(R)}$.

Reescribimos, por tanto, la ec. (3.40) en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
S_{\text{fct}}^{(1)} = & a_1 \tilde{X}_1 + a_2 \tilde{X}_2 + c \tilde{X}_3 + d_L \tilde{X}_{4L} + d_R \tilde{X}_{4R} + f_L \tilde{X}_{5L} + f_R \tilde{X}_{5R} \\
& + n_L \tilde{X}_{6L} + n_R \tilde{X}_{6R} + u_{1L} \tilde{X}_{7L} + u_{1R} \tilde{X}_{7R} + u_{2L} \tilde{X}_{8L} + u_{2R} \tilde{X}_{8R}.
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Necesitamos las variaciones bajo b de los monomios integrados \tilde{X} desarrolladas en términos de los monomios integrados que denominamos \mathcal{M} en la sección anterior. Además, los coeficientes de estos desarrollos deben estar simetrizados si los índices del grupo de “gauge” de los monomios correspondientes tiene propiedades de simetría. Esto es necesario porque, por ejemplo, $\mathcal{M}_3^{abc} = \mathcal{M}_3^{acb}$ y entonces no todos los \mathcal{M}_3^{abc} son linealmente independientes. El resultado es:

$$b \tilde{X}_1 = 2 \delta^{ab} \mathcal{M}_1^{ab} - 2 c^{abc} \mathcal{M}_4^{abc}, \quad b \tilde{X}_2 = -2 \delta^{ab} \mathcal{M}_1^{ab} + 2 c^{abc} \mathcal{M}_2^{abc},$$

$$\begin{aligned}
b \tilde{X}_3 &= -i c^{abc} \mathcal{M}_4^{abc} + i c^{abc} \mathcal{M}_2^{abc} \\
&\quad - \frac{i}{2} [c^{ebc} c^{eda} + c^{ebd} c^{eca}] \mathcal{M}_7^{abcd} + i [c^{ebc} c^{eda} + c^{eba} c^{edc}] \mathcal{M}_8^{abcd}, \\
b \tilde{X}_{4L(R)} &= -d_{L(R)}^{abc} \mathcal{M}_2^{abc} - d_{L(R)}^{abc} \mathcal{M}_3^{abc} + d_{L(R)}^{abc} \mathcal{M}_4^{abc} + d_{L(R)}^{abc} \mathcal{M}_5^{abc} \\
&\quad - (d_{L(R)}^{ebc} c^{eda} + d_{L(R)}^{ebd} c^{eca}) \mathcal{M}_7^{abcd} + d_{L(R)}^{ebd} c^{eca} \mathcal{M}_8^{abcd}, \\
b \tilde{X}_{5L(R)} &= - [T_{L(R)}^{abcd} + T_{L(R)}^{acdb} + T_{L(R)}^{abdc} + T_{L(R)}^{adcb}] \mathcal{M}_7^{abcd} \\
&\quad - 2 [T_{L(R)}^{acbd} + T_{L(R)}^{abdc} + T_{L(R)}^{acdb} + T_{L(R)}^{adbc}] \mathcal{M}_8^{abcd} \\
&\quad - \frac{1}{4} [(T_{L(R)}^{mcde} + T_{L(R)}^{mdec} + T_{L(R)}^{mced} + T_{L(R)}^{medc}) c^{mab} \\
&\quad + (T_{L(R)}^{mbde} + T_{L(R)}^{mdeb} + T_{L(R)}^{mbed} + T_{L(R)}^{medb}) c^{mac} \\
&\quad + (T_{L(R)}^{mebc} + T_{L(R)}^{mbce} + T_{L(R)}^{mecb} + T_{L(R)}^{mcbe}) c^{mad} \\
&\quad + (T_{L(R)}^{mdbc} + T_{L(R)}^{mbcd} + T_{L(R)}^{mdcb} + T_{L(R)}^{mcbd}) c^{mae}] \mathcal{M}_9^{abcde}, \\
&= - [2T_{L(R)}^{acbd} + 2T_{L(R)}^{adbc} - (T_L + T_R) (c^{ebc} c^{eda} + c^{ebd} c^{eca})] \mathcal{M}_7^{abcd} \\
&\quad - 2 [2T_{L(R)}^{abcd} + 2T_{L(R)}^{adcb} + (T_L + T_R) (c^{ebc} c^{eda} + c^{eba} c^{edc})] \mathcal{M}_8^{abcd} \\
&\quad + 0 \mathcal{M}_9^{abcde}, \\
b \tilde{X}_{6L(R)} &= \mathcal{M}_{10L(R)} + \mathcal{M}_{11L(R)}, \\
b \tilde{X}_{7L(R)} &= \mathcal{M}_{11L(R)} + i \mathcal{M}_{13L(R)} + \frac{i}{2} c^{abc} \mathcal{M}_{14L(R)}^{abc}, \\
b \tilde{X}_{8L(R)} &= \mathcal{M}_{10L(R)} - i \mathcal{M}_{12L(R)} - \frac{i}{2} c^{abc} \mathcal{M}_{15L(R)}^{abc}, \tag{3.42}
\end{aligned}$$

¡ El coeficiente en $b \cdot \tilde{X}_{5L(R)}$ de \mathcal{M}_9^{abcde} resulta ser cero !, pero sólo puede llegarse a este valor del coeficiente si se expresan las constantes de estructura c^{abc} como conmutadores de las matrices correspondientes y se utiliza la ciclicidad de la traza del grupo. Si este coeficiente no fuera cero el sistema de ecuación de más adelante sería incompatible. Se ha utilizado también la relación dada por la ec. (3.36). Es decir, que *para llegar a un sistema compatible hay que tener en cuenta propiedades no triviales de las constantes de estructura*.

Ahora imponemos que la variación según ec. (3.42) de la suma de los términos del lado derecho de la ec. (3.41) concuerde, en un factor global -1 , con el lado derecho de la ec. (3.34), por supuesto, sin considerar los términos de la anomalía esencial no abeliana. Se llega así al siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
* \text{ de } \mathcal{M}_1^{ab} : \quad 2a_1 - 2a_2 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{3}, \\
* \text{ de } \mathcal{M}_2^{abc} : \quad -2a_2 - i c &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{3} \quad \text{y} \quad d_{L(R)} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
* \text{ de } \mathcal{M}_4^{abc} : \quad & 2a_1 + i c = \frac{1}{(4\pi)^2} (T_L + T_R) \frac{2}{3} \quad \text{y} \quad d_{L(R)} = 0, \\
* \text{ de } \mathcal{M}_5^{abc} : \quad & d_{L(R)} = 0, \quad \text{y ya no escribimos esta incógnita más, al ser nula} \\
* \text{ de } \mathcal{M}_7^{abcd} : \quad & -\frac{i}{2} c + T_L f_L + T_R f_R = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{6} \quad \text{y} \quad -2 f_{L(R)} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} \\
* \text{ de } \mathcal{M}_8^{abcd} : \quad & i c - 2T_L f_L - 2T_R f_R = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{3} \quad \text{y} \quad -4 f_{L(R)} = -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} \\
* \text{ de } \mathcal{M}_{9L(R)}^{abcd} : \quad & \frac{f_{L(R)}}{2} \times 0 = 0 \\
* \text{ de } \mathcal{M}_{10L(R)} : \quad & n_{L(R)} + u_{2L(R)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[C_{L(R)} - \frac{C_A}{4} + (\alpha' - 1) \left(\frac{C_{L(R)}}{6} - \frac{C_A}{4} \right) \right] \\
* \text{ de } \mathcal{M}_{11L(R)} : \quad & n_{L(R)} + u_{1L(R)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[C_{L(R)} - \frac{C_A}{4} + (\alpha' - 1) \left(\frac{C_{L(R)}}{6} - \frac{C_A}{4} \right) \right] \\
* \text{ de } \mathcal{M}_{12L(R)} : \quad & -i u_{2L(R)} = \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 [1 + (\alpha' - 1)] \frac{C_A}{4} \\
* \text{ de } \mathcal{M}_{13L(R)} : \quad & i u_{1L(R)} = -\frac{i}{(4\pi)^2} g^2 [1 + (\alpha' - 1)] \frac{C_A}{4} \\
* \text{ de } \mathcal{M}_{14L(R)}^{abc} : \quad & -\frac{i}{2} u_{1L(R)} = \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 [1 + (\alpha' - 1)] \frac{C_A}{8} \\
* \text{ de } \mathcal{M}_{15L(R)}^{abc} : \quad & \frac{i}{2} u_{1L(R)} = -\frac{i}{(4\pi)^2} g^2 [1 + (\alpha' - 1)] \frac{C_A}{8} \tag{3.43}
\end{aligned}$$

Nótese que hay más ecuaciones que incógnitas. De hecho varias ecuaciones están repetidas y el sistema tiene entonces 14 ecuaciones diferentes para 13 incógnitas, pero el sistema resulta ser *compatible* y con la *solución única*:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{5}{12} (T_L + T_R), \quad a_2 = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{4} (T_L + T_R), \\
c &= \frac{i}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} (T_L + T_R), \quad d_{L(R)} = 0, \\
f_{L(R)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{12}, \quad n_{L(R)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[C_{L(R)} + (\alpha' - 1) \frac{C_{L(R)}}{6} \right] \\
u_{1L(R)} &= u_{2L(R)} = -\frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \frac{C_A}{4} \alpha'. \tag{3.44}
\end{aligned}$$

En resumen, la siguiente elección de $S_{\text{fct}}^{(1)}$ cancela hasta el orden \hbar los términos anómalos espurios de la identidad de Slavnov-Taylor (ec. (3.23))

$$S_{\text{fct}}^{(1)} = \int d^d x \left\{ \frac{\hbar^1}{(4\pi)^2} (T_L + T_R) \left[\frac{5}{12} (\partial_\mu A^\mu)^2 + \frac{1}{4} A_\mu \square A^\mu \right] \right\}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{\hbar^1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{6} c^{abc} (\partial_\mu A_\nu^a) A^{b\mu} A^{c\nu} \\
& + \frac{\hbar^1}{(4\pi)^2} \frac{T_L^{abcd} + T_R^{abcd}}{12} A_\mu^a A^{b\mu} A_\nu^c A^{d\nu} \\
& + \frac{\hbar^1}{(4\pi)^2} g^2 [C_L + (\alpha' - 1)C_L/6] \frac{i}{2} \bar{\psi} \bar{\gamma}^\mu P_L \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi \\
& + \frac{\hbar^1}{(4\pi)^2} g^2 [C_R + (\alpha' - 1)C_R/6] \frac{i}{2} \bar{\psi}' \bar{\gamma}^\mu P_R \overset{\leftrightarrow}{\partial}_\mu \psi' \\
& - \frac{\hbar^1}{(4\pi)^2} g^2 \frac{C_A}{4} [1 + (\alpha' - 1)] (\bar{L}s\psi + Ls\bar{\psi} + \bar{R}s\psi' + Rs\bar{\psi}') \} \\
& + \hbar^1 l_g^{(1)} L_g + \hbar^1 l_\psi^{(1)} L_\psi + \hbar^1 l_{\psi'}^{(1)} L_{\psi'} + \hbar^1 l_A^{(1)} L_A + \hbar^1 l_\omega^{(1)} L_\omega, \quad (3.45)
\end{aligned}$$

donde $l_g^{(1)}$, $l_\psi^{(1)}$, $l_{\psi'}^{(1)}$, $l_A^{(1)}$ y $l_\omega^{(1)}$ son coeficientes arbitrarios que se determinarán con las condiciones de normalización a un “loop” y L_g , L_ψ , $L_{\psi'}$, L_A , L_ω son cualquiera de las generalizaciones al espacio de “ d dimensiones” de la regularización dimensional de los correspondientes operadores cuatridimensionales invariantes bajo b .

Nótese que no se han añadido términos en $\bar{\omega}$ o ρ , a excepción de la combinación $\tilde{\rho}$ que aparece en los contratérminos invariantes; por tanto la ecuación de los fantasmas (3.28) sigue siendo válida hasta el orden \hbar .

Nótese también que, debido a que se han añadido contratérminos finitos que *dependen de los campos externos* L , \bar{L} , R y \bar{R} ahora se tiene para el caso, por ejemplo, de $l_\omega^{(1)} = 0$,

$$\begin{aligned}
\left. \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta \bar{L}(x)} \right|_{L \equiv 0} & \neq N[s\psi](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \\
\left. \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta \bar{L}(x)} \right|_{L \equiv 0} & = N[s\psi](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \hbar^1 u_{1L}^{(1)} s\psi(x) + O(\hbar^2) = \\
& = N[s\psi + \hbar^1 u_{1L}^{(1)} s\psi](x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + O(\hbar^2), \quad (3.46)
\end{aligned}$$

lo que puede interpretarse como una renormalización “no mínima” de la inserción del operador $s\psi(x)$. Por supuesto, siempre utilizamos el algoritmo de substracción mínima sobre los diagramas regularizados, pero ahora la acción tiene contratérminos finitos *explícitos* de orden \hbar^1 . Más aún, eligiendo $l_A^{(1)} \neq 0$ o $l_\omega^{(1)} \neq 0$, la inserción de las variaciones de BRS no lineales de los campos pueden renormalizarse de diferentes formas, todas ellas compatibles con las identidades de Slavnov-Taylor, es decir, hay varias condiciones de normalización para las inserciones compatibles con las identidades.

No hay que olvidar que los contratérminos finitos dados en la ec. (3.45), dependen de la elección de la acción de orden \hbar^0 , S_0 (la acción regularizada dimensionalmente de partida). Si se hubiera elegido el otro vértice fermiónico mencionado, los contratérminos necesarios habrían sido diferentes (y seguramente más complicados), pero en cualquier caso el procedimiento habría sido igual de correcto.

Por último, nótese que los contratérminos finitos obtenidos son invariantes bajo CP si la teoría clásica original también lo era.

Capítulo 4.

Modelo Higgs-Kibble abeliano quirral.

4.1. Acción clásica

La acción clásica, invariante bajo la simetría discreta CP, es la siguiente

$$\begin{aligned}
 S_{\text{inv}} = \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + (D_\mu \phi^\dagger)(D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2 \right. \\
 + \sum_{k \in I \cup J} \left(\bar{\psi}_k [i \not{D} + A(e_{Lk} P_L + e_{Rk} P_R)] \psi_k \right) \\
 - \sum_{i \in I} \left(\sqrt{2} f_i \phi \bar{\psi}_i P_R \psi_i + \sqrt{2} f_i \phi^\dagger \bar{\psi}_i P_L \psi_i \right) \\
 \left. - \sum_{j \in J} \left(\sqrt{2} f_j \phi \bar{\psi}_j P_L \psi_j + \sqrt{2} f_j \phi^\dagger \bar{\psi}_j P_R \psi_j \right) \right\}. \quad (4.1)
 \end{aligned}$$

Aquí A_μ es un campo de ‘gauge’ abeliano, ϕ es un campo escalar complejo, ψ_i y ψ_j son colecciones de campos fermiónicos de Dirac, $F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y $D_\mu \phi \equiv (\partial_\mu - i A_\mu) \phi$. Esta acción es invariante también bajo las transformaciones “gauge” abelianas $\delta A_\mu = \partial_\mu \omega$, $\delta \phi = i\omega \phi$, $\delta \psi_k = i\omega(e_{Lk} P_L + e_{Rk} P_R) \psi_k$ siempre y cuando las cargas fermiónicas satisfagan*

$$\begin{aligned}
 e_{Li} &= e_{Ri} + 1, \quad \text{si } i \in I \\
 e_{Lj} &= e_{Rj} - 1, \quad \text{si } j \in J
 \end{aligned} \quad (4.2)$$

* Si se redefinen los campos $A_\mu \rightarrow 2g A_\mu$, $\omega \rightarrow 2g\omega$ entonces el modelo coincide con el de la sección IV.A de [110], siendo ψ (ψ') nuestros fermiones de tipo $r = +1$ ($r = -1$) y su carga f nuestro $(2e_R + 1)g/2$ ($(2e_R - 1)g/2$).

	s	x_μ	$\phi_{1(2)}$	A_μ	ψ	c	\bar{c}	B	$K_{\phi_{1(2)}}$	K_ψ
Gh. n.	1	0	0	0	0	1	-1	0	-1	-1
Dimen.	0	-1	1	1	3/2	0	2	2	3	5/2
Comm.	-1	+1	+1	+1	-1	-1	-1	+1	-1	+1
CP	s	x^μ	$(-)\phi_{1(2)}$	$-A^\mu$	$D\bar{\psi}^t$	$-c$	$-\bar{c}$	$-B$	$(-)K_{\phi_{1(2)}}$	$-K_\psi^t D^{-1}$

Tabla 2: Número de fantasmas, dimensión conmutatividad y transformaciones bajo CP de los campos, coordenadas y el operador de BRS. En la tercera fila, +1 (-1) significa que el símbolo conmuta (anticommuta) y en la última fila, $D \equiv \gamma^0 C$, donde C es la matriz de conjugación habitual. Nótese que las propiedades bajo CP elegidas para los fantasmas hacen que el operador de BRS sea invariante bajo CP

Consideraremos una ruptura espontánea de la simetría debida a un valor esperado en el vacío no nulo de la componente real de ϕ . Por tanto escribimos la acción clásica BRS invariante así:

$$S_{\text{cl}} = S_{\text{inv}} + S_{\text{gf}} + S_{\text{ext}}, \quad (4.3)$$

donde

$$\begin{aligned}
S_{\text{inv}} &= \int d^4x \left\{ -\frac{1}{4g^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + [(D_\mu \phi^+)(D^\mu \phi) + \mu^2 \phi^+ \phi - \lambda(\phi^+ \phi)^2]_{\phi=\frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1+v+i\phi_2)} \right. \\
&\quad \left. + \bar{\psi} [i\not{D} + A((\theta+r)P_L + \theta P_R)] \psi - f[(v+\phi_1)\bar{\psi}\psi + i r \phi_2 \bar{\psi}\gamma_5 \psi] \right\} \\
S_{\text{gf}} &= \int d^4x s \left[\frac{1}{2} \xi \bar{c} B + \bar{c} \Sigma \right] = \\
&\quad \int d^4x \frac{\xi}{2} B^2 + B(\partial_\mu A^\mu + \rho \phi_2) - \bar{c} [\partial^\mu \partial_\mu + \rho(\phi_1 + v)] c, \\
S_{\text{ext}} &= \int d^4x K_{\phi_1} s\phi_1 + K_{\phi_2} s\phi_2 + K_\psi s\psi + s\bar{\psi} K_{\bar{\psi}}, \quad (4.4)
\end{aligned}$$

En esta acción, v es un parámetro con dimensiones de masa, ϕ_1 y ϕ_2 son campos escalares reales, c es el campo “fantasma”, \bar{c} el campo “antifantasma”, B es el campo de Lautrup-Nakanishi, K_Φ son los campos externos acoplados a las correspondientes variaciones BRS y $\Sigma = \partial_\mu A^\mu + \rho \phi_2$ es el funcional fijador del “gauge” más general que es lineal, preserva la simetría CP, tiene el número de “fantasmas” adecuado y es consistente con el conteo de potencias (véase la Tabla 2). ξ y ρ son los parámetros de “gauge”. Se han omitido los índices que etiquetan las colecciones de fermiones, una notación que se mantendrá.

† Podrían también haberse introducido los “anticampos” o fuentes de las variaciones BRS triviales de A_μ y c , lo que haría más claro el estudio y la interpretación de la cohomología de \tilde{b} a orden 0, pero no son relevantes ni necesarios para los propósitos prácticos de este trabajo.

Se define $e_{Rk} \equiv \theta_k$ y $e_{Lk} \equiv \theta_k + r_k$. Entonces, $\{r_k\}_{k \in I \cup J}$ no deben entenderse como parámetros libres sino como abreviaturas de $+1$ si $k \in I$ y de -1 si $k \in J$.

La transformación BRS es:

$$\begin{aligned} s\phi_1 &= -\phi_2 c, & s\phi_2 &= (v + \phi_1) c, \\ s\psi &= i c [(\theta + r)P_L + \theta P_R]\psi, & s\bar{\psi} &= i \bar{\psi} [(\theta + r)P_R + \theta P_L] c, \\ sA_\mu &= \partial_\mu c, & sc &= 0, \quad s\bar{c} = B, \quad sB = sK_{\phi_i} = sK_\psi = sK_{\bar{\psi}} = 0, \end{aligned} \quad (4.5)$$

que deja invariante a S_{cl} por la anticonmutatividad de γ_5 en 4 dimensiones.

Si $\mu^2 = \lambda v^2$ entonces no hay términos lineales en la acción clásica (4.3). Esto es equivalente a una condición de normalización que establece a cero el valor esperado en el vacío del campo ϕ_1 . Los términos cuadráticos de (4.3) dan los propagadores (cuya expresión que se muestra para $\mu^2 = \lambda v^2$ en la ref. [20]). Nótese que no se elige ningún valor concreto del parámetro ρ , es decir que habrá una mezcla $A\phi_2$ en el nivel árbol y más allá en el desarrollo perturbativo. Nótese también que aunque la teoría es abeliana, los campos fantasmas no son libres: interaccionan con ϕ_1 a través del término de fijación del “gauge” de la acción. Esto hace que convenga utilizar el formalismo de BRS.

4.2. Renormalización algebraica

La acción clásica (4.3) es una solución, sobre el espacio de polinomios con invariantes bajo la simetría discreta CP, con número de fantasmas igual a 0 y dimensión de masas igual a 4, de la identidad de de Slavnov-Taylor (STI)

$$\begin{aligned} \int d^4x \left\{ (\partial_\mu c \frac{\delta S_{cl}}{\delta A_\mu} + B \frac{\delta S_{cl}}{\delta \bar{c}} + \frac{\delta S_{cl}}{\delta K_{\phi_1}} \frac{\delta S_{cl}}{\delta \phi_1} + \frac{\delta S_{cl}}{\delta K_{\phi_2}} \frac{\delta S_{cl}}{\delta \phi_2} + \right. \\ \left. + \frac{\delta S_{cl}}{\delta K_\psi} \frac{\delta S_{cl}}{\delta \psi} + \frac{\delta S_{cl}}{\delta K_{\bar{\psi}}} \frac{\delta S_{cl}}{\delta \bar{\psi}} \right\} = 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

que gobierna la invariancia BRS de la teoría a nivel cuántico, y la ecuación de fijación del “gauge”

$$\frac{\delta S_{cl}}{\delta B} = \xi B + \partial_\mu A^\mu + \rho \phi_2, \quad (4.7)$$

que es la ecuación de movimiento del campo multiplicador de Lagrange, B .

Cualquier funcional \mathcal{F} que satisfaga ambas ecuaciones también satisface la ecuación de los “fantasmas”:

$$\frac{\delta \mathcal{F}}{\delta \bar{c}} + \square c + \rho \frac{\delta \mathcal{F}}{\delta K_{\phi_2}} = 0. \quad (4.8)$$

Se exige que el funcional 1PI renormalizado Γ_{Ren} sea, en el sentido de una serie formal de funcionales en \hbar , una deformación de S_{cl} restringida por las mismas ecuaciones. Si el

proceso de renormalización preserva tanto la ecuación de fijación del “gauge” como la de los “fantasmas”, Γ_{Ren} tendrá la forma:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Ren}}[\phi_1, \phi_2, A_\mu, \psi, \bar{\psi}, c, \bar{c}, B, K_{\phi_1}, K_{\phi_2}, K_\psi, K_{\bar{\psi}}] = \\ \int d^4x \frac{\xi}{2} B^2 + B(\partial_\mu A^\mu + \rho \phi_2) - \bar{c} \square c \\ + \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}[\phi_1, \phi_2, A_\mu, \psi, \bar{\psi}, c, K_{\phi_1}, \tilde{K}_{\phi_2} \equiv K_{\phi_2} - \rho \bar{c}, K_\psi, K_{\bar{\psi}}], \end{aligned} \quad (4.9)$$

de tal forma que el lado izquierdo de la identidad de Slavnov-Taylor será

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}) \equiv \int d^4x \left\{ (\partial_\mu c) \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta K_{\phi_1}} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta \phi_1} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta \tilde{K}_{\phi_2}} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta \phi_2} + \right. \\ \left. \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta K_\psi} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta \psi} + \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta K_{\bar{\psi}}} \frac{\delta \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}}{\delta \bar{\psi}} \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

De aquí en adelante y en este capítulo, la tilde indicará dependencia en los mismos campos de los que $\tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}$ depende.

Como siempre, introducimos el operador lineal de Slavnov-Taylor:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{\tilde{\mathcal{F}}} \equiv \int d^4x \left\{ (\partial_\mu c) \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta \phi_1} \frac{\delta}{\delta K_{\phi_1}} + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta K_{\phi_1}} \frac{\delta}{\delta \phi_1} + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta \phi_2} \frac{\delta}{\delta \tilde{K}_{\phi_2}} + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta \tilde{K}_{\phi_2}} \frac{\delta}{\delta \phi_2} + \right. \\ \left. + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta \psi} \frac{\delta}{\delta K_\psi} + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta K_\psi} \frac{\delta}{\delta \psi} + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta \bar{\psi}} \frac{\delta}{\delta K_{\bar{\psi}}} + \frac{\delta \tilde{\mathcal{F}}}{\delta K_{\bar{\psi}}} \frac{\delta}{\delta \bar{\psi}} \right\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

que tiene las propiedades de nilpotencia

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{F}}) = 0, \quad \forall \tilde{\mathcal{F}} \\ \tilde{\mathcal{S}}_{\tilde{\mathcal{F}}} \tilde{\mathcal{S}}_{\tilde{\mathcal{F}}} = 0, \quad \text{si } \tilde{\mathcal{S}}(\tilde{\mathcal{F}}) = 0. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para $\tilde{\mathcal{F}} = \tilde{\mathcal{S}}_{\text{cl}}$ entonces se define el operador lineal

$$\tilde{b} \equiv \tilde{\mathcal{S}}_{\tilde{\mathcal{S}}_{\text{cl}}}, \quad (4.13)$$

cuya actuación sobre todos los campos se da en el apéndice C.

La parte local de dimensión máxima igual a 4 de $\tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}$ en un orden determinado del desarrollo perturbativo y antes de la imposición de las identidades de Slavnov-Taylor es una combinación lineal de la siguiente base del espacio $\tilde{\mathcal{V}}_0$ de polinomios integrados en los campos y sus derivadas, escalares Lorentz e invariantes bajo CP con dimensión canónica de masas igual o inferior a 4 y número de fantasmas igual a 0:

$$\begin{aligned} \tilde{e}_1 &\equiv \int \phi_1, & \tilde{e}_2 &\equiv \int \phi_1^2, & \tilde{e}_3 &\equiv \int \phi_2^2, \\ \tilde{e}_4 &\equiv \int \phi_1^3, & \tilde{e}_5 &\equiv \int \phi_1 \phi_2^2, & \tilde{e}_6 &\equiv \int \phi_1^4, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_7 &\equiv \int \phi_2^4, & \tilde{e}_8 &\equiv \int \phi_1^2 \phi_2^2, & \tilde{e}_9 &\equiv \int (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_1), \\
\tilde{e}_{10} &\equiv \int (\partial_\mu \phi_2)(\partial^\mu \phi_2), & \tilde{e}_{11} &\equiv \int \phi_2 (\partial_\mu A^\mu), & \tilde{e}_{12} &\equiv \int A_\mu \phi_1 (\partial^\mu \phi_2), \\
\tilde{e}_{13} &\equiv \int A_\mu \phi_2 (\partial^\mu \phi_1), & \tilde{e}_{14} &\equiv \int A_\mu A^\mu, & \tilde{e}_{15} &\equiv \int A_\mu A^\mu \phi_1, \\
\tilde{e}_{16} &\equiv \int A_\mu A^\mu \phi_1^2, & \tilde{e}_{17} &\equiv \int A_\mu A^\mu \phi_2^2, & \tilde{e}_{18} &\equiv \int (\partial_\mu A^\mu)^2, \\
\tilde{e}_{19} &\equiv \int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2, & \tilde{e}_{20} &\equiv \int (A_\mu A^\mu)^2, & & \\
\tilde{e}_{21} &\equiv \int K_{\phi_1} \phi_2 c, & \tilde{e}_{22} &\equiv \int \tilde{K}_{\phi_2} c, & \tilde{e}_{23} &\equiv \int \tilde{K}_{\phi_2} \phi_1 c, \\
\tilde{e}_{24} &\equiv \int \bar{\psi} \psi, & & & & \\
\tilde{e}_{25} &\equiv \int \bar{\psi} i \not{\partial} P_L \psi, & \tilde{e}_{26} &\equiv \int \bar{\psi} i \not{\partial} P_R \psi, & & \\
\tilde{e}_{27} &\equiv \int \bar{\psi} \not{A} P_L \psi, & \tilde{e}_{28} &\equiv \int \bar{\psi} \not{A} P_R \psi, & & \\
\tilde{e}_{29} &\equiv \int \phi_1 \bar{\psi} \psi = \phi_1 \bar{\psi} P_R \psi + \phi_1 \bar{\psi} P_L \psi, & \tilde{e}_{30} &\equiv \int \phi_2 \bar{\psi} \gamma_5 \psi = \phi_2 \bar{\psi} P_R \psi - \phi_2 \bar{\psi} P_L \psi, & & \\
\tilde{e}_{31} &\equiv \int (K_\psi P_L \psi - \bar{\psi} P_R K_\psi) c, & \tilde{e}_{32} &\equiv \int (K_\psi P_R \psi - \bar{\psi} P_L K_\psi) c & (4.14)
\end{aligned}$$

No se debe olvidar que siempre se dispone de la libertad de añadir a la acción de partida cualquier término de ese espacio de la forma $\tilde{X} = \sum_{i=1}^{32} \tilde{x}^i \tilde{e}_i$, donde cada \tilde{x}^i es una serie formal en \hbar de orden $O(\hbar)$ como mínimo.

En un esquema de renormalización no invariante, como no queda otro remedio en teorías quirales, la identidad de Slavnov-Taylor renormalizada tiene un término de ruptura:

$$\tilde{\mathcal{S}}(\tilde{\Gamma}_{\text{Ren}}) = \tilde{\Delta} \cdot \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}} \quad (4.15)$$

que en renormalización dimensional sabemos por los capítulos anteriores debe ser la inserción renormalizada mínima de un operador local integrado, invariante bajo CP y de dimensión máxima igual a 4 y de número de “fantasmas” igual a 1, que al orden más bajo en el que no sea nulo tendrá la forma de $\tilde{\Delta} \cdot \tilde{\Gamma}_{\text{Ren}} = \hbar^n \tilde{\Delta}^{(n)} + O(\hbar^{n+1})$ que a su vez puede expresarse como una combinación lineal de la siguiente base del espacio $\tilde{\mathcal{V}}_1$ de polinomios integrados de dimensión máxima 4, número de fantasmas igual a 1 e invariantes bajo CP:

$$\begin{aligned}
\tilde{u}_1 &\equiv \int \phi_2 c, & \tilde{u}_2 &\equiv \int \phi_1 \phi_2 c, & \tilde{u}_3 &\equiv \int \phi_2^3 c, \\
\tilde{u}_4 &\equiv \int \phi_1^2 \phi_2 c, & \tilde{u}_5 &\equiv \int (\Box \phi_2) c, & \tilde{u}_6 &\equiv \int \phi_1^3 \phi_2 c, \\
\tilde{u}_7 &\equiv \int \phi_1 \phi_2^3 c, & \tilde{u}_8 &\equiv \int \phi_2 (\Box \phi_1) c, & \tilde{u}_9 &\equiv \int \phi_1 (\Box \phi_2) c, \\
\tilde{u}_{10} &\equiv \int (\partial_\mu \phi_1)(\partial^\mu \phi_2) c, & \tilde{u}_{11} &\equiv \int (\partial_\mu A^\mu) c, & \tilde{u}_{12} &\equiv \int A_\mu (\partial^\mu \phi_1) c, \\
\tilde{u}_{13} &\equiv \int (\partial_\mu A^\mu) \phi_1 c, & \tilde{u}_{14} &\equiv \int (\partial_\mu A^\mu) \phi_1^2 c, & \tilde{u}_{15} &\equiv \int A_\mu \phi_1 (\partial^\mu \phi_1) c, \\
\tilde{u}_{16} &\equiv \int (\partial_\mu A^\mu) \phi_2^2 c, & \tilde{u}_{17} &\equiv \int A_\mu \phi_2 (\partial^\mu \phi_2) c, & \tilde{u}_{18} &\equiv \int \Box (\partial_\mu A^\mu) c, \\
\tilde{u}_{19} &\equiv \int A_\mu A_\nu (\partial^\mu A^\nu) c, & \tilde{u}_{20} &\equiv \int A_\mu A^\nu \phi_2 c, & \tilde{u}_{21} &\equiv \int A_\mu A^\mu \phi_1 \phi_2 c, \\
\tilde{u}_{22} &\equiv \int A_\mu A^\mu (\partial^\nu A^\nu) c, & & & & \\
\tilde{u}_{23} &\equiv \int \bar{\psi} \gamma_5 \psi c, & \tilde{u}_{24} &\equiv \int \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu P_L \psi) c, & \tilde{u}_{25} &\equiv \int \partial_\mu (\bar{\psi} \gamma^\mu P_R \psi) c, \\
\tilde{u}_{26} &\equiv \int \phi_2 \bar{\psi} \psi c, & \tilde{u}_{27} &\equiv \int \phi_1 \bar{\psi} \gamma_5 \psi c, & & \\
\tilde{u}_{28} &\equiv \int \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} (\partial^{\mu_1} A^{\mu_2}) (\partial^{\mu_3} A^{\mu_4}) c, & & & (4.16)
\end{aligned}$$

es decir, $\tilde{\Delta}^{(n)} = \sum_{j=1}^{28} \tilde{\Delta}^{j(n)} \tilde{u}_j$. Nótese que, incidentalmente, los campos externos no aparecen en esta base por razones de contaje de potencias y por el carácter abeliano de los “fantasmas”, $cc = 0$.

La proyección del término de ruptura sobre la dirección del último elemento de esta base constituye la *anomalía esencial* del modelo, ya que puede demostrarse que el sistema lineal $\tilde{b}\tilde{X}^{(n)} = \tilde{\Delta}^{(n)}$ tiene una solución (sobredeterminada) si y sólo si el coeficiente $\tilde{\Delta}^{28(n)}$ se anula. Esta demostración puede hacerse utilizando técnicas cohomológicas: la primera ecuación de (4.12) conduce a $\tilde{b}\tilde{\Delta} = 0$, que no es más que la famosa condición de consistencia, y la segunda ecuación de (4.12) implica $\tilde{b}^2 = 0$; por tanto, $\tilde{\Delta} \equiv \text{anomalía} + \tilde{b}\tilde{X}$, perteneciendo la anomalía esencial al espacio de cohomología no trivial de número de fantasmas igual a 1 del operador \tilde{b} . En el apéndice B de la ref. [20] se da una demostración alternativa mediante un cálculo explícito del sistema lineal.

Definamos los elementos de matriz del operador \tilde{b} restringidos a su acción desde $\tilde{\mathcal{V}}_0$ a $\tilde{\mathcal{V}}_1$ de la siguiente manera: $\tilde{b}\tilde{e}_i \equiv \tilde{b}_0^{j_i} u_j$ (en el apéndice A de la ref. [20] se dan los valores explícitos de estos elementos de matriz). Entonces, el sistema lineal

$$\sum_{j=1}^{27} \tilde{b}_0^{j_i} \tilde{x}^{i(n)} = \tilde{\Delta}^{j(n)}, \quad i = 1, \dots, 32 \quad (4.17)$$

siempre tiene solución, módulo una combinación lineal arbitraria de orden $O(\hbar^n)$ de términos invariantes bajo \tilde{b} , que pueden ser cualquier base del núcleo $\tilde{\mathcal{K}}_0$ del operador lineal restringido $\tilde{b}_0 \equiv \tilde{b} : \tilde{\mathcal{V}}_0 \rightarrow \tilde{\mathcal{V}}_1$ (véase la ref. [20] para una elección de una base concreta).

Nótese que el rango de \tilde{b}_0 es la dimensión de $\tilde{\mathcal{V}}_0$ menos la dimensión de $\tilde{\mathcal{K}}_0$, es decir, 21, lo que es menor que la dimensión de $\tilde{\mathcal{V}}_1$, por lo que, en general, para valores arbitrarios del término de ruptura, el sistema lineal (4.17) sería incompatible. Por tanto, su compatibilidad cuando se introduzcan en él los valores reales calculados del término de ruptura constituirá una comprobación importante de la corrección del cálculo.

Por último, por lo expuesto en la teoría general de la renormalización algebraica del capítulo 1, si no existe anomalía esencial a orden \hbar^n , el término de ruptura a orden n consiste sólo de términos triviales en cuanto a la cohomología, y, añadiendo $\hbar^n \tilde{S}_{\text{fct}}^{(n)} = -\hbar^n \tilde{X}^{(n)}$ a la acción previa, entonces se cancela el término de ruptura a orden n .

4.3. Regularización dimensional de la acción

Como siempre, elegimos los términos cinéticos con la misma forma que la acción de 4 dimensiones y los de interacción respetando al menos todas las simetrías discretas de la acción cuatridimensional.

En concreto elegimos la generalización más simple y obvia para todos los vértices de la acción y de las variaciones de BRS de los campos excepto en el caso del vértice bosón-fermión, para el que se adopta la forma regularizada “barrada”:

$$\bar{\psi} [i \not{\partial} + A_\mu (e_L \bar{\gamma}^\mu P_L + e_R \bar{\gamma}^\mu P_R)] \psi \quad (4.18)$$

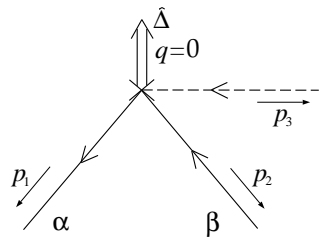
es decir la forma regularizada invariante bajo CP o “hermítica”, que puede reescribirse en la siguiente forma que muestra la pérdida de la invariancia bajo las transformaciones “gauge” (regularizadas) de una manera más explícita:

$$i \bar{\psi} \not{\partial} \psi + i \bar{\psi} \hat{\not{\partial}} \psi. \quad (4.19)$$

Por tanto, la acción regularizada de partida S_0 no es invariante bajo BRS:

$$\begin{aligned} s_d S_0 &= s_d \int d^d x i \bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu \partial_\mu \psi = \int d^d x \frac{1}{2} c \left\{ (r + 2\theta) \partial_\mu (\bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu \psi) + r (\bar{\psi} \hat{\gamma}^\mu \gamma_5 \overleftrightarrow{\partial}_\mu \psi) \right\} \\ &\equiv \hat{\Delta} \equiv \int d^d x \hat{\Delta}(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

La regla de Feynman de la inserción de este operador evanescente viene dada por la figura 2



$$\begin{aligned} &\equiv \tilde{\Gamma}_{\psi \bar{\psi} c; \Delta}^{(0)} \alpha \beta (p_1, p_2; q \equiv 0) = \\ &= \frac{i}{2} [(r + 2\theta) (\hat{p}_1 + \hat{p}_2) - r (\hat{p}_1 - \hat{p}_2) \gamma_5] \Big|_{\alpha \beta} \end{aligned}$$

Figura 2. Regla de Feynman de la inserción del término de ruptura ec. (4.20)

Además, para que el propagador tenga una forma simple, se fija exactamente $\mu^2 = \lambda v^2$ en la acción regularizada. Así la acción clásica de partida puede interpretarse como la acción habitual con ruptura espontánea de simetría.

4.4. Término de ruptura de la simetría BRS

Sabemos que la ecuación de fijación del “gauge” (4.7) y la ecuación de los fantasmas (4.8) son válidas tanto para el funcional generador 1PI regularizado como renormalizado por substracción mínima si se utiliza la acción regularizada de la sección anterior o si se modifica por la adicción de términos independientes de B y tal que su única dependencia de \bar{c} y de K_{ϕ_2} sea a través de la combinación $\tilde{K}_{\phi_2} = K_{\phi_2} - \rho \bar{c}$. Por tanto, restringiremos el espacio de los posibles contratérminos finitos al espacio $\tilde{\mathcal{V}}_0$, cuya base fue dada en (4.14). Por supuesto, como siempre, tenemos varias posibles generalizaciones al espacio de regularización dimensional de los contratérminos finitos. Dos generalizaciones distintas diferirán en un operador evanescente de orden \hbar lo que modifica el valor de las cantidades cuatridimensionales sólo al orden siguiente. Elegiremos la forma regularizada de la base (4.14) idéntica a la cuatridimensional.

A un loop tenemos que evaluar

$$\tilde{\Delta}^{(1)} = \left[N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma^R \right]^{(1)} + b \tilde{S}_{\text{fct}}^{(1)}, \quad (4.21)$$

lo que sabemos que es equivalente al cálculo directo de la parte finita a un loop de $N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma^R$ siguiendo estos pasos:

- i) calcúlese la parte finita de todos los diagramas 1PI divergentes por conteo de potencias con la inserción de $\hat{\Delta}$ y de cualquier campo cuántico o externo BRS como patas externas.
- ii) establézcase $\bar{g}^{\mu\nu}$ a $g^{\mu\nu}$ y $\hat{g}^{\mu\nu}$ a cero.
- iii) encuéntrense operadores cuatridimensionales cuyas reglas de Feynman en el nivel árbol se ajusten a los resultados de ii)

Se realizó el cálculo según estos pasos de una forma completamente automática utilizando programas de cálculo simbólico. En la ref. [20] pueden encontrarse los resultados para cada diagrama y para cada función 1PI así como las fórmulas que expresan a todo orden los coeficientes $\tilde{\Delta}_j^{(1)}$ del término de ruptura en la base (4.16) de operadores integrados en términos de funciones 1PI. Así se llega a los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_1^{(1)} &= -8 f^4 v^3, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_2^{(1)} &= -24 f^4 v^2, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_3^{(1)} &= \frac{-8 f^4 v}{3}, \\
 (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_4^{(1)} &= -24 f^4 v, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_5^{(1)} &= \frac{-4 f^2 v}{3}, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_6^{(1)} &= -8 f^4, \\
 (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_7^{(1)} &= \frac{-8 f^4}{3}, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_8^{(1)} &= -4 f^2, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_9^{(1)} &= \frac{-4 f^2}{3}, \\
 (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{10}^{(1)} &= -4 f^2, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{11}^{(1)} &= -2 f^2 v^2, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{12}^{(1)} &= 0, \\
 (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{13}^{(1)} &= -4 f^2 v, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{14}^{(1)} &= -2 f^2, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{15}^{(1)} &= 0, \\
 (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{16}^{(1)} &= -2 f^2, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{17}^{(1)} &= -8 f^2, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{18}^{(1)} &= \frac{-1}{3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{19}^{(1)} &= \frac{2}{3}, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{20}^{(1)} &= 4 f^2 v, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{21}^{(1)} &= 4 f^2, \\
(4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{22}^{(1)} &= \frac{1}{3}, \\
(4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{23}^{(1)} &= \frac{-i}{6} f (3 \rho r + 4 g^2 \theta (1 + \theta r) v (5 + \xi')), \\
(4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{24}^{(1)} &= \frac{-((-6 f^2 r + g^2 (2 \theta + r + \theta^2 r) (5 + \xi')))}{6}, \\
(4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{25}^{(1)} &= \frac{r (-6 f^2 + g^2 \theta^2 (5 + \xi'))}{6}, \\
(4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{26}^{(1)} &= \frac{-2 f g^2 \theta (\theta + r) (5 + \xi')}{3}, & (4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{27}^{(1)} &= \frac{-2i}{3} f g^2 \theta (1 + \theta r) (5 + \xi'), \\
(4\pi)^2 \tilde{\Delta}_{28}^{(1)} &= \frac{2 (3 \theta + r + 3 \theta^2 r)}{3}.
\end{aligned} \tag{4.22}$$

Nótese que si sólo hay un fermión de un tipo. por ejemplo $r = +1$, entonces el coeficiente de la anomalía no es cero para ningún valor de θ y que incluso añadiendo fermiones del mismo tipo, el coeficiente de la anomalía no puede cancelarse. Hay cancelación de anomalía, por ejemplo, con dos fermiones con $\theta_1 = \theta_2 = 0$ y $r_1 = +1$, $r_2 = -1$ o en el caso de dos fermiones con $\theta_1 = 1$, $\theta_2 = -1$ y $r_1 = +1$, $r_2 = -1$. Con las definiciones $e_{Rk} \equiv \theta_k$ y $e_{Lk} \equiv \theta_k + r_k$ con $r_k = \pm 1$, el coeficiente de la anomalía puede ponerse en la forma familiar:

$$\tilde{\Delta}_{28}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} \sum_{k \in I \cup J} (e_{Lk}^3 - e_{Rk}^3) \tag{4.23}$$

pero entonces no deben olvidarse nunca las restricciones (4.2).

4.4. Recuperación de la simetría BRS

Sabemos por la teoría algebraica de la renormalización que se presentó en el primer capítulo que el sistema lineal (4.17) tiene que ser compatible, aunque su solución no será única. Utilizando los valores de los coeficientes $\tilde{\Delta}_i^{(1)}$, que se presentaron en la sección anterior, el sistema resultará ser compatible siendo una de sus soluciones:

$$\begin{aligned}
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,1}^{(1)} &= 8 f^4 v^3, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,2}^{(1)} &= 12 f^4 v^2, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,3}^{(1)} &= 0, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,4}^{(1)} &= 8 f^4 v, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,5}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,6}^{(1)} &= 2 f^4, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,7}^{(1)} &= \frac{-2 f^4}{3}, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,8}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,9}^{(1)} &= 0, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,10}^{(1)} &= \frac{2 f^2}{3}, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,11}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,12}^{(1)} &= 0, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,13}^{(1)} &= 4 f^2, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,14}^{(1)} &= f^2 v^2, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,15}^{(1)} &= 2 f^2 v, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,16}^{(1)} &= f^2, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,17}^{(1)} &= 3 f^2, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,18}^{(1)} &= \frac{-1}{6},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,19}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,20}^{(1)} &= \frac{-1}{12}, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,21}^{(1)} &= 0, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,22}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,23}^{(1)} &= 0, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,24}^{(1)} &= \frac{f (3 \rho r + 4 g^2 \theta (1 + \theta r) v (5 + \xi'))}{6 r}, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,25}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,26}^{(1)} &= 0, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,27}^{(1)} &= \frac{(-6 f^2 r + g^2 (2 \theta + r + \theta^2 r) (5 + \xi'))}{6}, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,28}^{(1)} &= \frac{- (r (-6 f^2 + g^2 \theta^2 (5 + \xi')))}{6}, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,29}^{(1)} &= \frac{2 f g^2 \theta (\theta + r) (5 + \xi')}{3}, \\
(4\pi)^2 \tilde{x}_{0,30}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,31}^{(1)} &= 0, & (4\pi)^2 \tilde{x}_{0,32}^{(1)} &= 0.
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Por tanto, la solución general para los contratérminos finitos en el orden de 1 “loop” es

$$\hbar \tilde{S}_{\text{fct}}^{(1)} = -\hbar \sum_{i=1}^{32} \tilde{x}_{0,i}^{(1)} \tilde{e}_i + \hbar \sum_{l=1}^{11} c_l^{(1)} \mathcal{I}_l, \tag{4.25}$$

donde la base \tilde{e}_i viene dada por (4.14) y los términos simétricos por cualquier base \mathcal{I}_l de términos invariantes bajo b . Por tanto, la familia parametrizada de acciones regularizadas $S_1 \equiv S_0 + \hbar \tilde{S}_{\text{fct}}^{(1)}$, con $\tilde{K}_{\phi_2} = K_{\phi_2} - \rho \bar{c}$, da, por substracción mínima en el esquema BMHV, todas las posibles teorías renormalizadas invariantes bajos la transformación discreta CP, compatibles en el nivel árbol con la acción (4.3) y con la renormalizabilidad por conteo de potencias, y que satisfacen hasta el orden de un “loop” tanto las identidades de Slavnov-Taylor (4.6) como la ecuación de fijación del “gauge” (4.7).

Capítulo 5.

La ec. del grupo de renormalización.

5.1. Renormalización algebraica y RGE

Las técnicas habituales utilizadas para deducir la ecuación del grupo de renormalización en teorías vectoriales como la electrodinámica cuántica (Q.E.D.) o la cromodinámica cuántica (Q.C.D.) no son válidas para el caso de las teorías quirales que nos ocupa. El formalismo de campos y constantes de acoplamiento “desnudas” no funciona de forma tan directa al no tenerse una renormalización “infinita” multiplicativa, como demuestra la ec. (3.17). La generalización de este formalismo para incluir operadores evanescentes y contratérminos finitos y sus correspondientes constantes de acoplamiento resulta bastante compleja y sutil (véanse por ejemplo las refs. [111,86,112,113]).

Pero gracias a los *principios de acción cuántica* en renormalización dimensional, las identidades de Bonneau y el formalismo de la renormalización algebraica, no es necesario introducir en ningún momento los campos y constantes de acoplamiento desnudas para deducir la auténtica ecuación del grupo de renormalización (RGE) de la teoría renormalizada. Por supuesto, esto es así tanto en teorías vectoriales (véase la sección 5.3 de este capítulo para una deducción rigurosa de la RGE sin utilizar los campos desnudos) como en teorías quirales.

Sea $\Gamma_{\text{ren}}[\varphi, \Phi, K_{\Phi}; g, \alpha', \mu]$ el funcional generador 1PI renormalizado dimensionalmente hasta el orden \hbar^n de la teoría “gauge” en cuestión, que se supondrá libre de anomalías. Γ_{ren} depende de forma explícita de los campos cuánticos φ y Φ , los campos externos K_{Φ} , la constante de acoplamiento g , el parámetro de fijación del “gauge” $\alpha' \equiv \alpha/g^2$ y la escala de regularización dimensional μ , que se introduce de acuerdo a lo dicho en *viii)* de la sección 2.3. Se asume que se han elegido los contratérminos finitos, $S_{\text{fct},n}$ si así era necesario, para que la ecuación de la simetría BRS $\mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}}) = 0$, la condición de fijación del “gauge” $\mathcal{B}(\Gamma_{\text{Ren}}) = 0$ (por ejemplo, la ec. (3.27)), y la ecuación de los fantasmas $\mathcal{G}\Gamma_{\text{Ren}} = 0$ (ec. (3.28)) se satisfagan hasta el orden \hbar^n .

La ecuación del grupo de renormalización desde el punto de vista de renormalización algebraica es un desarrollo del funcional $\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}$ en términos de una cierta base de

inserciones cuánticas de operadores de dimensión ultravioleta igual o menor que 4 y número de fantasmas igual a 0 [106,18]. Los coeficientes de este desarrollo, que son serie formales de potencias en \hbar , son conocidos como las funciones beta y dimensiones anómalas de la teoría. Como Γ_{ren} satisface, hasta el orden \hbar^n , las ecuaciones mencionadas en el anterior párrafo, los elementos de la base de inserciones sobre las que realizar el desarrollo están restringidos por las siguientes tres ecuaciones, ciertas hasta el orden \hbar^n :

$$\begin{aligned}\mathcal{S}_{\Gamma_{\text{Ren}}} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} &= 0, \\ \frac{\delta}{\delta B} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} &= 0, \\ \mathcal{G} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} &= 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Nótese que el operador $\mu \frac{\partial}{\partial \mu}$ conmuta con los operadores funcionales $\frac{\delta}{\delta B}$, \mathcal{G} y que

$$\mu \frac{\partial}{\partial \mu} (\mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}})) = \mathcal{S}_{\Gamma_{\text{Ren}}} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}.\tag{5.2}$$

donde $\mathcal{S}_{\Gamma_{\text{Ren}}}$ es el operador lineal de BRS correspondiente a $\mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}})$.

Los funcionales perturbativos renormalizados \mathcal{L} con dimensión igual a 4 y número de fantasmas igual a 0 que satisfacen, hasta el orden \hbar^n incluido, el conjunto de ecuaciones

$$\mathcal{S}_{\Gamma}(\mathcal{L}) = 0, \quad \frac{\delta}{\delta B}(\mathcal{L}) = 0, \quad \mathcal{G}(\mathcal{L}) = 0.\tag{5.3}$$

forman un espacio lineal. Construyamos una base de este espacio. En la aproximación clásica, es decir a orden \hbar^0 , una base de este espacio viene dada [18] por los términos invariantes bajo $b \equiv \mathcal{S}_{\text{cl}}$, que en el caso del modelo quiral del capítulo 3 serían L_g , L_{ψ}^R , $L_{\psi'}^L$, L_{ψ}^L , $L_{\psi'}^R$, L_A y L_{ω} , definidos así:

$$\begin{aligned}L_g &= g \frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial g} = -2 (S_{\text{cl} AA} + S_{\text{cl} AAA} + S_{\text{cl} AAA}), \\ L_{\psi}^R &= \mathcal{N}_{\psi}^R S_{\text{cl}} = 2S_{\text{cl}}^R \bar{\psi} \psi, & L_{\psi'}^L &= \mathcal{N}_{\psi'}^L S_{\text{cl}} = 2S_{\text{cl}}^L \bar{\psi}' \psi', \\ L_{\psi}^L &= \mathcal{N}_{\psi}^L S_{\text{cl}} = 2S_{\text{cl}}^L \bar{\psi} \psi + 2S_{\text{cl}} \bar{\psi} \psi_A, & L_{\psi'}^R &= \mathcal{N}_{\psi'}^R S_{\text{cl}} = 2S_{\text{cl}}^R \bar{\psi}' \psi' + 2S_{\text{cl}} \bar{\psi}' \psi' A, \\ L_A &= \mathcal{N}_A S_{\text{cl}} = 2S_{\text{cl} AA} + 3S_{\text{cl} AAA} + 4S_{\text{cl} AAAA} + S_{\text{cl}} \bar{\psi} \psi_A + S_{\text{cl}} \bar{\psi}' \psi' A - S_{\text{cl} \rho \omega} - S_{\text{cl} \bar{\omega} \omega}, \\ L_{\omega} &= \mathcal{N}_{\omega} S_{\text{cl}} = S_{\text{cl} \rho \omega} + S_{\text{cl} \bar{\omega} \omega} + S_{\text{cl} \rho \omega A} + S_{\text{cl} \zeta \omega \omega} + S_{\text{cl}} \bar{L} s \psi + S_{\text{cl}} \bar{R} s \psi' + S_{\text{cl}} L s \bar{\psi} + S_{\text{cl}} R s \bar{\psi}',\end{aligned}\tag{5.4}$$

Los términos $S_{\text{cl} \dots}$ son los términos correspondientes de la acción clásica S_{cl} de partida independientes de B . Los operadores diferenciales simétricos [18] \mathcal{N}_{ψ}^R , \mathcal{N}_{ψ}^L , $\mathcal{N}_{\psi'}^R$, $\mathcal{N}_{\psi'}^L$, \mathcal{N}_A y \mathcal{N}_{ω} de la ec. (5.4) se definen como:

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\psi}^L &\equiv N_{\psi}^L + N_{\bar{\psi}}^L - N_L - N_{\bar{L}}, & \mathcal{N}_{\psi}^R &\equiv N_{\psi}^R + N_{\bar{\psi}}^R, \\ \mathcal{N}_{\psi'}^L &\equiv N_{\psi'}^L + N_{\bar{\psi}'}^L, & \mathcal{N}_{\psi'}^R &\equiv N_{\psi'}^R + N_{\bar{\psi}'}^R - N_R - N_{\bar{R}} \\ \mathcal{N}_A &\equiv \text{Tr}(N_A - N_{\rho} - N_B - N_{\bar{\omega}}) + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ \mathcal{N}_{\omega} &\equiv \text{Tr}(N_{\omega} - N_{\zeta}).\end{aligned}\tag{5.5}$$

Los operadores $N_\psi^{L(R)}$, $N_{\psi'}^{L(R)}$, N_L , $N_{\bar{L}}$, N_R , $N_{\bar{R}}$, N_A , N_ω , $N_{\bar{\omega}}$ y N_ζ simplemente cuentan el número de los campos respectivos y son los operadores de la ec. (3.20) para $d = 4$.

En el caso de una teoría Yang-Mills vectorial no abeliana, como la cromodinámica cuántica (QCD), la acción es invariante bajo paridad, y la base se reduce a:

$$\begin{aligned} L_g &= g \frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial g} = -2 (S_{\text{cl} AA} + S_{\text{cl} AAA} + S_{\text{cl} AAA}), \\ L_\psi &= \mathcal{N}_\psi S_{\text{cl}} = 2S_{\text{cl} \bar{\psi}\psi} + 2S_{\text{cl} \bar{\psi}'\psi'A}, \\ L_A &= \mathcal{N}_A S_{\text{cl}} = 2S_{\text{cl} AA} + 3S_{\text{cl} AAA} + 4S_{\text{cl} AAAA} + S_{\text{cl} \bar{\psi}\psi A} - S_{\text{cl} \rho\omega} - S_{\text{cl} \bar{\omega}\omega}, \\ L_\omega &= \mathcal{N}_\omega S_{\text{cl}} = S_{\text{cl} \rho\omega} + S_{\text{cl} \bar{\omega}\omega} + S_{\text{cl} \rho\omega A} + S_{\text{cl} \zeta\omega\omega} + S_{\text{cl} \bar{Y}s\psi} + S_{\text{cl} Ys\bar{\psi}}, \end{aligned} \quad (5.4)'$$

con $\mathcal{N}_\psi \equiv N_\psi + N_{\bar{\psi}} - N_Y - N_{\bar{Y}}$, siendo Y y \bar{Y} los campos externos acoplados a las variaciones BRS de los campos fermiónicos.

Hasta el orden \hbar^n , una extensión cuántica, es decir con funcionales renormalizados correspondientes a desarrollos perturbativos de funciones de Green, de la base clásica de la ec. (5.4) viene dada [18] por la acción sobre Γ_{Ren} de los operadores diferenciales simétricos definidos más arriba y el también operador diferencial simétrico $g\partial_g$. Así por ejemplo

$$g \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial g}, \mathcal{N}_\psi^R \Gamma_{\text{Ren}}, \mathcal{N}_{\psi'}^L \Gamma_{\text{Ren}}, \mathcal{N}_\psi^L \Gamma_{\text{Ren}}, \mathcal{N}_{\psi'}^R \Gamma_{\text{Ren}}, \mathcal{N}_A \Gamma_{\text{Ren}}, \mathcal{N}_\omega \Gamma_{\text{Ren}}, \quad (5.6)$$

que deben entenderse como series formales en \hbar , concuerdan con los funcionales correspondientes de la ec. (5.4) a orden \hbar^0 .

Por tanto, y hasta el orden \hbar^n , cualquier solución conjunta de las ecs. (5.1) debe ser una combinación lineal, con coeficientes entendidos como series formales en \hbar , de los funcionales de la ec. (5.6). En particular, $\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}$ debe tener un desarrollo en la base cuántica de arriba:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta g \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_\psi^L \mathcal{N}_\psi^L - \gamma_{\psi'}^R \mathcal{N}_{\psi'}^R - \gamma_\psi^R \mathcal{N}_\psi^R - \gamma_{\psi'}^L \mathcal{N}_{\psi'}^L - \gamma_A \mathcal{N}_A - \gamma_\omega \mathcal{N}_\omega \right] \Gamma_{\text{Ren}} = 0, \quad (5.7)$$

para el caso del modelo quirál, y para el caso más simple del modelo vectorial:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta g \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_\psi \mathcal{N}_\psi - \gamma_A \mathcal{N}_A - \gamma_\omega \mathcal{N}_\omega \right] \Gamma_{\text{Ren}} = 0. \quad (5.7)'$$

Esta ecuación es cierta hasta el mismo orden \hbar^n en que el funcional 1PI renormalizado satisface (5.1) y constituye la ecuación del grupo de renormalización de la teoría. En especial, el desarrollo de $\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}$ en términos de la base de la ec. (5.6) sólo es posible si el funcional renormalizado satisface orden a orden la identidad de la simetría BRS o identidad de Slavnov-Taylor. Si no fuera así, la base necesaria contendría tantos elementos como haya compatibles con las simetrías discretas del funcional 1PI. En general, un funcional 1PI regularizado dimensionalmente arbitrario no satisface la ecuación (5.7) debido a la presencia de operadores evanescentes y objetos covariantes “con gorro” como en el caso de las teorías quirales.

Los coeficientes del desarrollo de la ec. (5.6) son la función beta y las dimensiones anómalas de la teoría y son series formales en \hbar . La primera contribución no nula a estas series es siempre de orden \hbar , ya que la contribución de orden más bajo a Γ_{Ren} es la acción clásica, S_{cl} , y $\mu \frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial \mu} = 0$.

Esta forma algebraica de obtener el grupo de renormalización tiene el inconveniente de que no tiene una relación directa con el método de interpretación más “física” del grupo de renormalización “a la” Wilson [114] pero a cambio proporciona un marco general, potente y válido para cualquier esquema de renormalización.

5.2. Dependencia de la escala en ren. dimensional

Nótese que no se pueden utilizar los principios de acción cuántica regularizada para obtener una identidad para la dependencia de la escala μ ($\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}$) en renormalización dimensional mínima, ya que en este método de renormalización μ *no* es un parámetro de la acción regularizada ($S_0 + S_{\text{fct},n}$), sino que es un parámetro que se introduce “a mano” en cada integración de momentos internos en la forma de factor μ^{4-d} en la expresión regularizada del diagrama.

El problema de expresar $\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}$ como una inserción en Γ_{Ren} de una combinación lineal de operadores también fue resuelto por Bonneau [106] dentro del marco riguroso de renormalización dimensional mínima. Bonneau dio de forma explícita una fórmula similar a sus ecs. (2.35), es decir una identidad similar a las de Zimmermann, para el caso escalar y sin contratérminos finitos añadidos a la acción. Aquí necesitamos la generalización al caso de varios tipos de campos cuánticos y externos, con posibles objetos con “gorro” y con posibles contratérminos finitos añadidos hasta el orden \hbar^n a la acción, es decir, cuando la acción generalizada al “espacio de d dimensiones” es $S_0 + S_{\text{fct},n}$:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} = & \sum_{n=0}^4 \sum_{\{j_1, \dots, j_n\}} \sum_{N_l > 0} N_l \left[\right. \\ & \sum_{r=0}^{\omega(J)} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_r\} \\ 1 \leq i_j \leq n-1}} \left\{ \text{r.s.p.} \frac{(-i)^r}{r!} \frac{\partial^r}{\partial p_{i_1}^{\mu_1} \dots \partial p_{i_r}^{\mu_r}} (-i\hbar) \overline{\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \dots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n = -\sum p_i) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}, (N_l)} \Big|_{p_i=0} \right\} \\ & \times \frac{1}{n!} \int d^4x \, N \left[\phi_{j_n} \prod_{k=n-1}^1 \left\{ \left(\prod_{\{\alpha/i_\alpha=k\}} \partial_{\mu_\alpha} \right) \phi_{j_k} \right\} \right] (x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \\ & \sum_{\Phi} \sum_{r=0}^{\omega(J;\Phi)} \sum_{\substack{\{i_1 \dots i_r\} \\ 1 \leq i_j \leq n}} \left\{ \text{r.s.p.} \frac{(-i)^r}{(r)!} \frac{\partial^r}{\partial p_{i_1}^{\mu_1} \dots \partial p_{i_r}^{\mu_r}} \right. \\ & \left. \overline{\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \dots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n) N[s\Phi](p_{n+1} = -\sum p_i) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}, (N_l)} \Big|_{p_i=0} \right\} \end{aligned}$$

$$\times \frac{1}{n!} \int d^4x (K_\Phi(x) N \left[\prod_{k=n}^1 \left\{ \left(\prod_{\{\alpha/i_\alpha=k\}} \partial_{\mu_\alpha} \right) \phi_{j_k} \right\} \right] (x) \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \right] , \quad (5.8)$$

donde $J = \{j_1, \dots, j_n\}$, y, $\omega(J)$ y $\omega(J; \Phi)$ significan, respectivamente, el grado de divergencia superficial ultravioleta de las funciones 1PI $\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \cdots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}$ y $\langle \tilde{\phi}_{j_1}(p_1) \cdots \tilde{\phi}_{j_n}(p_n) N[s\Phi](p_{n+1}) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}$. La barra sobre las funciones de Green 1PI quiere decir que se han substraído todas las subdivergencias. El superíndice N_l sobre la función de Green 1PI indica que sólo los diagramas de Feynman con N_l “loops” tienen que ser considerados. Nótese que hay una suma sobre el número de “loops” y que cada sumando lleva un factor igual al número de “loops” N_l .

El polo del residuo simple (que se abrevia por el acrónimo inglés usual “r.s.p.”) de los diagramas de Feynman 1PI con las subdivergencias substraídas es un polinomio local en los momentos externos en el espacio de “ d dimensiones” de la regularización dimensional. Por tanto, en general, y especialmente en teorías quirales, contendrá objetos “normales” y “con gorro” (métricas, momentos, matrices γ , etc.) si se toma a $g^{\mu\nu}$ y $\hat{g}^{\mu\nu}$ como las métricas independientes, u objetos “barrados” y “con gorro” si se toma a $\bar{g}^{\mu\nu}$ y $\hat{g}^{\mu\nu}$. Por tanto, esta fórmula podrá generar de forma automática también inserciones evanescentes (también denominadas anómalas). El significado de \times en la fórmula es el mismo que en el de la ec. (2.35). Por tanto, el desarrollo de la ec. (5.8) tiene la forma

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} &= \sum_i r_i N[\mathcal{W}_i] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \sum_j \hat{r}_j N[\hat{\mathcal{W}}_j] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \\ &= \sum_i \bar{r}_i N[\bar{\mathcal{W}}_i] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \sum_j \hat{r}'_j N[\hat{\mathcal{W}}_j] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde \mathcal{W}_i y $\hat{\mathcal{W}}_j$ denotan, respectivamente, los elementos “estándares” (no evanescentes) y “anómalos” (evanescentes) de una base de monomios integrados en el espacio de regularización dimensional con número de fantasmas igual a 0 y dimensión ultravioleta menor o igual que 4 si estamos con el caso de teorías renormalizables por conteo de potencias. Los coeficientes $r_i = \bar{r}_i$ y \hat{r}_j o \hat{r}'_j de la ec. (5.9) son series formales en \hbar (empezando en \hbar , ya que su cálculo involucra el residuo simple de la parte divergente de funciones 1PI). Otra base alternativa es la formada por $\bar{\mathcal{W}}_i$ y $\hat{\mathcal{W}}_j$, aunque es menos conveniente para teorías vectoriales, donde en la acción no hay objetos “con gorro” si se regulariza la acción y las variaciones de BRS utilizando los monomios “normales”, por lo que en la primera línea de (5.9) se tendría en ese caso $\hat{r}_j = 0$.

Por supuesto, si $\hat{r}_j \neq 0$, como en el caso de las teorías quirales de los capítulos anteriores, podemos además expresar siempre $N[\hat{\mathcal{W}}_j] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ en términos de inserciones de operadores no evanescentes $N[\mathcal{W}_j] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ utilizando las identidades de Bonneau para las inserciones de operadores evanescentes.

Podemos describir de forma verbal la fórmula (5.8) de la siguiente manera, si lo que se desea es calcular los coeficientes a orden \hbar^m , $0 < m \leq n$:

- i) Elijase cada posible función 1PI que sea divergente por contaje de potencias (es decir, que tenga un número definido de campos cuánticos y externos)
- ii) Calcúlese el residuo del polo simple, una vez substraídas las subdivergencias, de cada diagrama de orden $O(\hbar^m)$ que pueda construirse con las reglas de Feynman derivadas de la acción $S_0 + S_{\text{fct},n}$ y que contribuya a esa función 1PI
- iii) Multiplíquese esta cantidad por el número de “loops” del diagrama (que será igual o inferior a m , ya que el diagrama podría involucrar contratérminos de órdenes inferiores)
- iv) Súmese sobre todos los diagramas que contribuyen a la función 1PI
- v) Siendo la suma una expresión local, sus diferentes sumandos pueden interpretarse como las reglas de Feynman de una inserción, en el nivel árbol, de operadores compuestos (normales o evanescentes) invariantes Lorentz e integrados, formados por los campos de la función 1PI de partida y alguna combinación de métricas, derivadas y matrices de Dirac.

Haciendo estos pasos para cada posible función 1PI divergente, se obtendrá el desarrollo de la ec. (5.9) con los coeficientes de orden $O(\hbar^m)$.

Pueden darse expresiones más concretas y válidas para todo orden de cada coeficiente r_i y \hat{r}_j . Por ejemplo, si

$$\begin{aligned} W_2^{ab} &= \int \square A_\mu^a A^{b\mu}, & \hat{W}_{21}^{ab} &= \int \square A_{\hat{\mu}}^a A^{b\hat{\mu}}, \\ \hat{W}_{22}^{ab} &= \int \hat{\square} A_\mu^a A^{b\mu}, & \hat{W}_{23}^{ab} &= \int \hat{\square} A_{\hat{\mu}}^a A^{b\hat{\mu}}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

entonces

$$\begin{aligned} r_2^{ab} &= \frac{-(-i)^2}{2} N_l \times \text{coef. del r.s.p. } (-i\hbar) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2 \equiv -p_1) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } p_1^2 g^{\mu\nu} \\ \hat{r}_{21}^{ab} &= \frac{-(-i)^2}{2} N_l \times \text{coef. del r.s.p. } (-i\hbar) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2 \equiv -p_1) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } p_1^2 \hat{g}^{\mu\nu}, \\ \hat{r}_{22}^{ab} &= \frac{-(-i)^2}{2} N_l \times \text{coef. del r.s.p. } (-i\hbar) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2 \equiv -p_1) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \hat{p}_1^2 g^{\mu\nu}, \\ \hat{r}_{23}^{ab} &= \frac{-(-i)^2}{2} N_l \times \text{coef. del r.s.p. } (-i\hbar) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2 \equiv -p_1) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \hat{p}_1^2 \hat{g}^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (5.11)$$

si se expresan todos los objetos covariantes en términos de $g^{\mu\nu}$ y $\hat{g}^{\mu\nu}$. Lo mismo puede hacerse con el resto de posibles monomios.

Conviene tener presentes los siguientes puntos sobre la ec. (5.8):

* Esta ecuación sólo es correcta si los contratérminos finitos $S_{\text{fct},n} = \sum_{m=1}^n \hbar^m S_{\text{fct}}^{(m)}$ son independientes explícitamente de μ . Esto no supone ninguna restricción real, porque los contratérminos finitos que necesitamos añadir a la acción para recuperar las identidades de BRS nunca pueden depender de μ , gracias a que para calcularlos sólo es necesario realizar residuos de polos simples de funciones 1PI con sus subdivergencia substraídas y esos residuos son siempre independientes de μ y de las masas [12,106].

* La ecuación original de la ref. [106], correspondiente a la ec. (5.8), reemplaza el factor N_l , que cuenta el número de “loops”, por el operador $\hbar \frac{\partial}{\partial \hbar}$. Esto es así porque *si no hay términos de orden \hbar^m , $m > 0$ en la acción*, entonces la potencia en \hbar de un diagrama cuenta su número de “loops”. Pero como hemos añadido a la acción términos de orden alto en \hbar ya no podemos utilizar \hbar como un contador del número de “loops”. Para solventar esto proponemos la introducción de un nuevo parámetro l , que divide a toda la acción, incluso a los contratérminos finitos. Entonces l^{N_l-1} aparecería como factor de un diagrama de Feynman de N_l “loops”. Nótese que solamente en el límite $l \rightarrow 1$, los contratérminos finitos servirían para recuperar las identidades de BRS. Por tanto el factor N_l de la ec. (5.8) puede reemplazarse en general por $\lim_{l \rightarrow 1} \{1 + l \frac{\partial}{\partial l}\}$. Gracias a los principios de acción cuántica, la acción del operador $\lim_{l \rightarrow 1} \{1 + l \frac{\partial}{\partial l}\}$ sobre una función de Green 1PI calculada para l arbitrario puede reemplazarse por la inserción del operador integrado $1 - N[i(S_0 + S_{\text{fct},n})]$ en la misma función 1PI a $l = 1$.

5.3. RGE en la teoría “gauge” vectorial no abeliana

En esta sección se presentará una deducción rigurosa de la ecuación del grupo de renormalización en teorías “gauge” no abelianas vectoriales y sin ruptura espontánea de la simetría.

Las deducciones de la ec. del grupo de renormalización en regularización dimensional que aparecen en los libros de texto sobre teoría cuántica de campos suelen utilizar la dependencia implícita en μ de los campos y constantes “desnudas”. Estas deducciones presentan el inconveniente de que presuponen la posibilidad de absorber los infinitos mediante renormalización multiplicativa y el carácter algo oscuro de la hipótesis inicial de la independencia total de μ de los campos y constantes “desnudas”.

Aunque para el caso de teorías vectoriales como QCD este tipo de deducción es correcta y permite obtener fórmulas para los polos de las funciones de Green singulares [115], aquí presentaremos la deducción rigurosa basada en la identidad de Bonneau con el doble propósito de:

* facilitar el paso al estudio del caso de teorías quirales, donde la renormalización dimensional “infinita” deja de ser multiplicativa y fallan las deducciones habituales directas;

* y presentar por primera vez de forma explícita el argumento en teorías no abelianas (en [106] se hace explícitamente para una teoría ϕ_4 , quedando implícito para teorías “gauge” una vez que se conoce la teoría general de la renormalización algebraica [18]).

La acción de partida es la conocida acción clásica de Yang-Mills en 4 dimensiones:

$$S_{\text{cl}} = S_{\text{inv}} + S_{\text{gf}} + S_{\text{ext}}, \quad (5.12)$$

con

$$S_{\text{inv}} = \int d^4x \left[-\frac{1}{4g^2} \text{Tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{i}{2} \bar{\psi} \overleftrightarrow{D} \psi \right],$$

$$\begin{aligned}
S_{\text{gf}} &= \int d^4x \operatorname{Tr} \frac{\alpha}{2} B^2 + \operatorname{Tr} B(\partial_\mu A^\mu) - \operatorname{Tr} \bar{\omega} \partial^\mu \nabla_\mu \omega, \\
S_{\text{ext}} &= \int d^4x \operatorname{Tr} \rho^\mu s A_\mu + \operatorname{Tr} \zeta s \omega + \bar{Y} s \psi + Y s \bar{\psi},
\end{aligned} \tag{5.13}$$

donde $A_\mu = A_\mu^a \tau^a$, $\omega, \bar{\omega}, B, \rho$ y ζ toman valores sobre un álgebra de Lie de un grupo de Lie simple y compacto G (τ^a son los generadores de G en una representación de dimensión finita dada, normalizada de tal manera que $\operatorname{Tr}[\tau^a \tau^b] = \delta^{ab}$), $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a \tau^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i[A_\mu, A_\nu]$, $\nabla_\mu \phi^a = \partial_\mu \phi^a - i[A_\mu, \phi]^a$, siendo ϕ cualquier objeto con valores en el álgebra de Lie, $D_\mu \psi = (\partial_\mu - i A_\mu^a T^a) \psi$, y ψ representa un conjunto de fermiones sobre los que está definida una representación (posiblemente, reducible) T^a .

S_{cl} es invariante en cuatro dimensiones bajo las siguientes transformaciones BRS:

$$\begin{aligned}
s\psi &= i\omega^a T^a \psi, & s\bar{\psi} &= i\bar{\psi} T^a \omega^a, & sA_\mu &= \nabla_\mu \omega, \\
s\omega &= i\omega^2, & s\bar{\omega} &= B, & sB &= 0, & s\rho^\mu &= s\zeta = sY = s\bar{Y} = 0.
\end{aligned} \tag{5.14}$$

Ahora escogemos como acción regularizada dimensionalmente la generalización canónica S_0 en el “espacio de d dimensiones” de S_{cl} , es decir, la que tiene la misma forma, y como transformaciones BRS regularizadas las canónicas, igualmente. Entonces, la acción regularizada es invariante bajo estas transformaciones BRS en “ d dimensiones” y por el principio de acción cuántica en regularización dimensional las identidades de Slavnov-Taylor regularizadas son ciertas de forma rigurosa (en el sentido perturbativo):

$$\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \int d^d x \left\{ \operatorname{Tr} \frac{\delta \Gamma}{\delta \rho^\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + \operatorname{Tr} \frac{\delta \Gamma}{\delta \zeta} \frac{\delta \Gamma}{\delta c} + \operatorname{Tr} B \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\omega}} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{Y}} \frac{\delta \Gamma}{\delta \psi} + \frac{\delta \Gamma}{\delta Y} \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{\psi}} \right\}. \tag{5.15}$$

Por el teorema 2 de la ref. [13] *el principio de acción es válido para el funcional renormalizado si no hay involucrada una dependencia explícita en d* , es decir que la ec. anterior también es rigurosamente cierta para Γ_{Ren} , el funcional generador 1PI renormalizado por substracción mínima. De igual forma, y por los principios de acción cuántica son ciertas para los funcionales regularizado y renormalizado, la condición de fijación del “gauge” $\frac{\delta \Gamma}{\delta B} = \alpha B + \partial_\mu A^\mu$ y la ecuación de los fantasmas $\mathcal{G}\Gamma \equiv \left\{ \frac{\delta}{\delta \bar{\omega}} + \partial_\mu \frac{\delta}{\delta \rho_\mu} \right\} \Gamma = 0$. Como siempre, denotaremos el operador lineal de Slavnov-Taylor con \mathcal{S}_Γ y definiremos $b = \mathcal{S}_{S_{\text{cl}}}$, $b_d = \mathcal{S}_{S_0}$,

Más aún, los mismos principios de acción cuántica sirven para establecer de forma sencilla que los contratérminos singulares son invariantes bajo b_d y que la renormalización dimensional mínima de las teorías vectoriales de Yang-Mills es multiplicativa en el sentido de que los monomios que puede hacer falta como contratérminos singulares son los mismos que los de la acción de partida (hablaríamos entonces de una renormalización multiplicativa de los monomios de la acción), y en el sentido más restrictivo, de que una cierta renormalización multiplicativa de los campos y constantes de la acción genera la acción de partida más los contratérminos singulares.

Por tanto, Γ_{Ren} cumple las ecs. (5.1). Ya se obtuvo en (5.4)’ una base en la aproximación clásica del espacio de funcionales que son inserciones cuánticas de dimensión ultravioleta igual a 4 y número de fantasmas igual a 0 y que satisfacen (5.1).

Por tanto, la ec. (5.7)’ es cierta orden a orden. Sólo falta calcular los coeficientes, lo que se hará siguiendo los siguientes pasos:

** Paso 1: Uso de los principios de acción cuántica en la RGE*

Utilizamos los principios de acción cuántica en renormalización dimensional para expresar la acción de los operadores de conteo N_X y de las derivadas en términos de inserciones renormalizadas. Damos el detalle del caso más complicado.

Considérese la variación $\delta A = A$, $\delta \bar{\omega} = -\omega$, $\delta B = -B$. Por el principio de acción cuántica en renormalización dimensional QAP3’ de la sección 2.4 tenemos $(N_A - N_{\bar{\omega}} - N_B)\Gamma_{\text{Ren}} = N[\delta S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$. Ahora consideremos $\rho \frac{\delta Z}{\delta \rho}$ y $\alpha \frac{\partial Z}{\partial \alpha}$. Por el principio QAP2 de la misma sección, $N_\rho \Gamma_{\text{Ren}} = N[N_\rho S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ y $\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} \Gamma_{\text{Ren}} = N[\alpha \frac{\partial S_0}{\partial \alpha}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ por el principio QAP1. Por tanto hemos obtenido:

$$\mathcal{N}_A \Gamma_{\text{Ren}} = (N_A - N_\rho - N_{\bar{\omega}} - N_B + 2\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}) \Gamma_{\text{Ren}} = N[\mathcal{N}_A S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = N[L_A] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \quad (5.16)$$

Los casos más simples restantes resultan evidentes ahora:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_\omega \Gamma_{\text{Ren}} &= N[\mathcal{N}_\omega S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = N[L_\omega] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} & \mathcal{N}_\psi \Gamma_{\text{Ren}} &= N[\mathcal{N}_\psi S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = N[L_\psi] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \\ g \frac{\partial}{\partial g} \Gamma_{\text{Ren}} &= N[g \frac{\partial}{\partial g} S_0] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = N[L_g] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \end{aligned} \quad (5.17)$$

L_A , L_ω , L_ψ y L_g vienen dados por (5.4)’ con la acción clásica de 4 dimensiones, S_{cl} , reemplazada por la acción regularizada S_0 :

$$\begin{aligned} L_g &= g \frac{\partial S_0}{\partial g} = -2(S_{0AA} + S_{0AAA} + S_{0AAA}), \\ L_\psi &= \mathcal{N}_\psi S_0 = 2S_{0\bar{\psi}\psi} + 2S_{0\bar{\psi}\psi A}, \\ L_A &= \mathcal{N}_A S_0 = 2S_{0AA} + 3S_{0AAA} + 4S_{0AAAA} + S_{0\bar{\psi}\psi A} - S_{0\rho\omega} - S_{0\bar{\omega}\omega}, \\ L_\omega &= \mathcal{N}_\omega S_0 = S_{0\rho\omega} + S_{0\bar{\omega}\omega} + S_{0\rho\omega A} + S_{0\bar{\omega}\omega A} S_{0\zeta\omega\omega} + S_{0\bar{Y}s\psi} + S_{0Ys\bar{\psi}}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Gracias a esto podemos escribir (5.7)’ en la forma

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta N[L_g] \cdot -\gamma_A N[L_A] \cdot -\gamma_\omega N[L_\omega] \cdot -\gamma_\psi N[L_\psi] \cdot \right] \Gamma_{\text{Ren}} = 0. \quad (5.19)$$

* Paso 2: Uso de la identidad de Bonneau (5.8)

Sea $S_0 + S_{\text{sct}}$ la acción clásica regularizada de partida más los contratérminos singulares necesarios para alcanzar una renormalización dimensional mínima de la teoría. Introduciendo las “constantes de renormalización” Z_X tenemos:

$$S_0 + S_{\text{sct}} = \sum_X Z_X S_{0X}, \quad (5.20)$$

donde S_{0X} representa cualquier posible monomio integrado de dimensión igual a 4 con los mismos coeficientes con los que aparecen en la acción regularizada de partida. Nótese que al tener la acción de partida sólo objetos covariantes “normales”, es decir, no tener ningún objeto covariante “con gorro”, todos los contratérminos singulares también estarán formados por objetos “normales” y serán de la misma forma que los monomios de la acción de partida, pues gracias a los principios de acción cuántica, hay una renormalización multiplicativa de los monomios originales de la acción.

Cada constante de renormalización es una serie formal de potencias en \hbar :

$$Z_X = 1 + \hbar Z_X(1) + \hbar^2 Z_X^{(2)} + \dots \quad (5.21)$$

Si definimos

$$\tilde{Z}_X \equiv \sum_m m \text{ r.s.p. } Z_X^{(m)} \hbar^m, \quad (5.22)$$

donde r. s. p. significa “el residuo del polo simple de”, entonces la ecuación (5.8) dice simplemente:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} &= - \sum_X \tilde{Z}_X N[S_{0X}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \\ &= \left[-\tilde{Z}_{AA} N[S_{0AA}] - \tilde{Z}_{AAA} N[S_{0AAA}] - \tilde{Z}_{AAAA} N[S_{0AAAA}] \right. \\ &\quad - \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi} N[S_{0\bar{\psi}\psi}] - \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi A} N[S_{0\bar{\psi}\psi A}] - \tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega} N[S_{0\bar{\rho}\omega}] - \tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega A} N[S_{0\bar{\rho}\omega A}] \\ &\quad \left. - \tilde{Z}_{\zeta\omega\omega} N[S_{0\zeta\omega\omega}] - \tilde{Z}_{\bar{Y}\psi\omega} N[S_{0\bar{Y}\psi\omega}] - \tilde{Z}_{Y\bar{\psi}\omega} N[S_{0Y\bar{\psi}\omega}] \right], \quad (5.23) \end{aligned}$$

donde se ha tenido en cuenta las simetrías discretas y de covariancia Lorentz y que, por los mismos principios de acción cuántica, la acción regularizada con los contratérminos singulares añadidos satisface tanto la ecuación de los fantasmas como de fijación del “gauge” ($\tilde{\rho}_\mu \equiv \rho_\mu + \partial_\mu \bar{\omega}$).

* Paso 3: Planteamiento del sistema lineal

Igualando la ecuación (5.19) (desarrollada utilizando la expresión de los monomios simétricos (5.18)), obtenida por los principios generales de la teoría de la renormalización algebraica junto con los particulares de la teoría de la regularización dimensional, y la ecuación (5.23), obtenida a partir de la identidad de Bonneau, que es particular al método de renormalización dimensional, e identificando los coeficientes en $S_0 X$, se llega al siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
& \text{— en } S_0 AA & -\tilde{Z}_{AA} &= 2\beta + 2\gamma_A \\
& \text{— en } S_0 AAA & -\tilde{Z}_{AAA} &= 2\beta + 3\gamma_A \\
& \text{— en } S_0 AAAA & -\tilde{Z}_{AAAA} &= 2\beta + 4\gamma_A \\
& \text{— en } S_0 \bar{\psi}\psi & -\tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi} &= 2\gamma_\psi \\
& \text{— en } S_0 \bar{\psi}\psi A & -\tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi A} &= \gamma_A + 2\gamma_\psi \\
& \text{— en } S_0 \bar{\rho}\omega & -\tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega} &= -\gamma_A + \gamma_\omega \\
& \text{— en } S_0 \bar{\rho}\omega A & -\tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega A} &= \gamma_\omega \\
& \text{— en } S_0 \zeta\omega\omega & -\tilde{Z}_{\zeta\omega\omega} &= \gamma_\omega \\
& \text{— en } S_0 \bar{Y}\psi\omega & -\tilde{Z}_{\bar{Y}\psi\omega} &= \gamma_\omega \\
& \text{— en } S_0 \bar{Y}\bar{\psi}\omega & -\tilde{Z}_{\bar{Y}\bar{\psi}\omega} &= \gamma_\omega,
\end{aligned} \tag{5.24}$$

sistema que no tiene solución si las constantes \tilde{Z} son arbitrarias y se toman la función beta y las dimensiones anómalas como sus incógnitas.

* Paso 4: Relaciones entre las constantes del sistema

La renormalización multiplicativa de los monomios tiene las siguientes restricciones (consecuencia directa de que la teoría regularizada preserva la simetría BRS en todos los órdenes) entre las constantes de renormalización “infinitas”

$$\begin{aligned}
\frac{Z_{AAA}}{Z_{AA}} &= \frac{Z_{AAAA}}{Z_{AAA}} = \frac{Z_{\bar{\psi}\psi A}}{Z_{\bar{\psi}\psi}} = \frac{Z_{\bar{\rho}\omega A}}{\tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega}} \\
Z_{\zeta\omega\omega} &= Z_{\bar{Y}\psi\omega} = Z_{\bar{Y}\bar{\psi}\omega} = Z_{\bar{\rho}\omega A},
\end{aligned} \tag{5.25}$$

que implican las siguientes relaciones sobre las constantes (5.22):

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}_{AAA} - \tilde{Z}_{AA} &= \tilde{Z}_{AAAA} - \tilde{Z}_{AAA} = \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi A} - \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi} = \tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega A} - \tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega} \\
\tilde{Z}_{\zeta\omega\omega} &= \tilde{Z}_{\bar{Y}\psi\omega} = \tilde{Z}_{\bar{Y}\bar{\psi}\omega} = \tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega A}.
\end{aligned} \tag{5.26}$$

* *Paso 5: Resolución del sistema*

Teniendo en cuenta estas relaciones, el sistema (5.24) ahora tiene solución única, rigurosa y válida a todos los órdenes en términos de los polos simples de diagramas 1PI de Feynman:

$$\begin{aligned}\beta &= \tilde{Z}_{AAA} - \frac{3}{2}\tilde{Z}_{AA}, \\ \gamma_A &= \tilde{Z}_{AA} - \tilde{Z}_{AAA}, \\ \gamma_\psi &= -\frac{1}{2}\tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi}, \\ \gamma_\omega &= -\tilde{Z}_{\bar{\rho}\omega A},\end{aligned}\tag{5.27}$$

que gracias a las relaciones (5.26) también pueden escribirse en la forma, más adecuada para la transición a QED,

$$\begin{aligned}\beta &= \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi A} - \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi} - 1/2\tilde{Z}_{AA}, \\ \gamma_A &= \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi} - \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi A}, \\ \gamma_\psi &= -1/2\tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi}, \\ \gamma_\omega &= -\tilde{Z}_{\bar{Y}\psi\omega}.\end{aligned}\tag{5.28}$$

* *Paso 6 (opcional): Transformación a las variables de campo habituales*

Normalmente, la constante g no suele aparecer en la acción en forma de factor g^{-2} delante del término bosónico puro, sino en forma de constante de acoplamiento única en los vértices y en las variaciones de BRS de los campos.

Para obtener esta forma más habitual se realiza el cambio de variables

$$A = gA', \quad \omega = g\omega', \quad \bar{\omega} = g^{-1}\bar{\omega}', \quad B = g^{-1}B', \quad \rho = g^{-1}\rho', \quad \zeta = g^{-1}\zeta', \quad \alpha = g^2\alpha'.\tag{5.29}$$

con lo que la acción y las transformaciones BRS adquieren la forma

$$\begin{aligned}S'_{\text{cl}} &= S'_{\text{inv}} + S'_{\text{gf}} + S'_{\text{ext}}, \\ S'_{\text{inv}} &= \int d^4x \left[-\frac{1}{4}\text{Tr} F_{\mu\nu}' F'^{\mu\nu} + \frac{i}{2}\bar{\psi}\overleftrightarrow{D}'\psi \right], \\ S'_{\text{gf}} &= \int d^4x \left[\text{Tr} \frac{\alpha'}{2} B'^2 + \text{Tr} B'(\partial_\mu A'^\mu) - \text{Tr} \bar{\omega}' \partial^\mu \nabla_\mu \omega' \right], \\ S'_{\text{ext}} &= \int d^4x \left[\text{Tr} \rho'^\mu s A'_\mu + \text{Tr} \zeta' s \omega' + \bar{Y} s \psi + Y s \bar{\psi} \right], \\ F'_{\mu\nu} &= F_{\mu\nu}^a \tau^a = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i g [A_\mu, A_\nu],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\nabla'_\mu \omega'^a &= \partial_\mu \omega'^a - i g [A_\mu, \omega]^a, \\
D'_\mu \psi &= (\partial_\mu - i g A_\mu^a T^a) \psi, \\
s\psi &= i g \omega'^a T^a \psi, \quad s\bar{\psi} = i g \bar{\psi}' T^a \omega^a, \quad sA'_\mu = \nabla'_\mu \omega', \\
s\omega' &= i g \omega'^2, \quad s\bar{\omega}' = B', \quad sB' = 0, \quad s\rho'^\mu = s\zeta' = sY = s\bar{Y} = 0,
\end{aligned} \tag{5.30}$$

mientras que la ecuación (5.7)' cambia a

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta g \frac{\partial}{\partial g} - \gamma_\psi \mathcal{N}_\psi - (\gamma_A + \beta) \mathcal{N}_{A'} - (\gamma_\omega + \beta) \mathcal{N}_{\omega'} \right] \Gamma_{\text{Ren}}' = 0, \tag{5.31}$$

donde las constantes β , γ_A , γ_ψ y γ_ω son las calculadas en el paso anterior.

Por tanto, si se escribe la ecuación del grupo de renormalización en la forma habitual

$$\begin{aligned}
&\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \beta_S \alpha_S \frac{\partial}{\partial \alpha_S} + \delta_{\alpha'} \alpha' \frac{\partial}{\partial \alpha'} \right. \\
&\quad - \gamma_{A'} N_{A'} - \gamma_\psi N_\psi - \gamma_{\bar{\psi}} N_{\bar{\psi}} - \gamma_{\omega'} N_{\omega'} - \gamma_{\bar{\omega}'} N_{\bar{\omega}'} \\
&\quad \left. - \gamma_{B'} N_{B'} - \gamma_{\rho'} N_{\rho'} - \gamma_{\zeta'} N_{\zeta'} - \gamma_Y N_Y - \gamma_{\bar{Y}} N_{\bar{Y}} \right] \Gamma_{\text{Ren}}' = 0,
\end{aligned} \tag{5.32}$$

con $\alpha_S \equiv g^2/(4\pi)$, entonces queda demostrado a todo orden en la teoría de perturbaciones que la función beta y las dimensiones anómalas pueden expresarse en términos de polos simples de diagramas de Feynman de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\beta_S &= \frac{2}{g} \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi A'} - 2 \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi} - \tilde{Z}_{A' A'} = \frac{2}{g} \tilde{Z}_{A' A' A'} - 3 \tilde{Z}_{A' A'} \\
\gamma_{A'} &= -\gamma_{\bar{\omega}'} = -\gamma_{B'} = -\gamma_{\rho'} = \frac{1}{2} \tilde{Z}_{A' A'} \\
\delta_{\alpha'} &= -2\gamma_{A'} = \tilde{Z}_{A' A'} \\
\gamma_{\omega'} &= -\gamma_{\zeta'} = \frac{1}{g} \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi A'} - \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi} - \frac{1}{2} \tilde{Z}_{A' A'} - \tilde{Z}_{\bar{Y}\psi\omega'} = \frac{\beta_S}{2} - \tilde{Z}_{\bar{Y}\psi\omega'} \\
\gamma_\psi &= \gamma_{\bar{\psi}} = -\gamma_{\bar{Y}} = -\gamma_Y = -\frac{1}{2} \tilde{Z}_{\bar{\psi}\psi},
\end{aligned}$$

que están en pleno acuerdo con los resultados de la referencia [116].

Nótese que utilizando las relaciones entre las constantes de renormalización de los campos y parámetros de la acción y las constantes de renormalización de cada monomio de la acción, la función beta y las dimensiones anómalas pueden expresarse en términos del primer tipo de constantes de renormalización.

5.4. RGE en la teoría “gauge” quirral no abeliana

El formalismo de renormalización algebraica, principios de acción cuántica en regularización dimensional e identidades de Bonneau utilizado en el caso anterior de una teoría vectorial tiene la ventaja de que también es sistemático y riguroso para teorías quirales en las que haya cancelación de anomalías.

En esta sección y a modo de ejemplo detallaremos el método a un “loop” en la teoría “gauge” quirral no abeliana del capítulo 3. Básicamente, aquí presentamos resultados que están contenidos dentro de nuestra publicación [19].

Recordemos que por la teoría general de la renormalización algebraica sabemos que se cumple la ecuación (5.7) siempre y cuando hayamos elegido la representación de la materia para que no haya anomalía esencial y los contratérminos finitos de la acción para que se satisfagan las identidades de Slavnov-Taylor renormalizadas dimensionalmente.

La técnica seguirá, por tanto, por los mismos cauces que en el caso de la teoría vectorial, es decir, expresar los operadores $\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}$, $g \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial g}$ y $\mathcal{N}_\phi \Gamma_{\text{Ren}}$ de la ec. (5.5) como inserciones en Γ_{Ren} de productos normales de operadores locales linealmente independientes y resolver el sistema de ecuaciones lineal para las incógnitas β , γ_ψ^L , $\gamma_{\psi'}^R$, γ_ψ^R , $\gamma_{\psi'}^L$, γ_A y γ_ω , que serán la función beta y las dimensiones anómalas de la teoría.

** Paso 1: Uso de los principios de acción cuántica en la RGE*

Por los mismos argumentos dados en el paso 1 de la sección anterior, llegamos a

$$\frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial g} = N\left[\frac{\partial(S_0 + S_{\text{fct},n})}{\partial g}\right] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \quad (5.33)$$

y

$$\mathcal{N}_\phi \Gamma_{\text{Ren}} = N[\mathcal{N}_\phi(S_0 + S_{\text{fct},n})] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \quad (5.34)$$

respectivamente, donde $S_{\text{fct},n} = \sum_{m=1}^n S_{\text{fct}}^{(m)}$ representa la suma de todos los contratérminos finitos añadidos. En particular, no incluye los contratérminos singulares. Tanto S_0 como $S_{\text{fct}}^{(n)}$ son objetos en el espacio de “ d dimensiones”, por lo que la elección en el proceso perturbativo recursivo de su expresión regularizada tiene una ambigüedad en un objeto evanescente, ambigüedad que sólo puede contribuir al orden siguiente en la teoría renormalizada.

Conocida la acción regularizada y los contratérminos finitos, resulta directo dar el desarrollo de los operadores regularizados dentro de los productos normales de (5.33) y (5.34) en la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(S_0 + S_{\text{fct},n})}{\partial g} &= \sum_i \bar{w}_{gi} \bar{\mathcal{W}}_i + \sum_j \hat{w}_{gj} \hat{\mathcal{W}}_j, \\ \mathcal{N}_\phi(S_0 + S_{\text{fct},n}) &= \sum_i \bar{w}_{\phi i} \bar{\mathcal{W}}_i + \sum_j \hat{w}_{\phi j} \hat{\mathcal{W}}_j. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por supuesto, utilizando las identidades de Bonneau de la sección 2.6 se puede expresar los productos normales de operadores evanescentes en términos de productos normales de operadores no evanescentes, por lo que junto con los resultados (5.33)-(5.35) siempre podremos expresar el lado derecho de (5.7) en la forma

$$\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} = \sum_i \left(-\beta w_{gi} + \sum_{\phi} \gamma_{\phi} w_{\phi i} \right) N[\bar{\mathcal{W}}_i] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \quad (5.36)$$

donde

$$w_{gi} = \bar{w}_{gi} + \sum_j \hat{w}_{gj} c_{ji} \quad \text{y} \quad w_{\phi i} = \bar{w}_{\phi i} + \sum_j \hat{w}_{\phi j} c_{ji}, \quad (5.37)$$

si el desarrollo de las inserciones anómalas es

$$N[\hat{\mathcal{W}}_j] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} = \sum_i c_{ji} N[\bar{\mathcal{W}}_i] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}. \quad (5.38)$$

Necesitamos por tanto, para cualquier orden, una base adecuada de monomios regularizados integrados $\{\bar{\mathcal{W}}_i\}$ y $\{\hat{\mathcal{W}}_i\}$ de dimensión ultravioleta 4 y número de fantasmas igual a 0. Pero para el cálculo en el primer orden \hbar^1 como los coeficientes de la ec. del grupo de renormalización ya empiezan en el orden \hbar^1 no se necesita utilizar monomios evanescentes ni los contratérminos finitos de orden \hbar^1 añadidos a la acción para recuperar las identidades de Slavnov-Taylor, por lo que en nuestro modelo y a orden \hbar^1 , el lado derecho de la ec. (5.7) es:

$$\begin{aligned} \mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} &= -\beta^{(1)} g \frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial g} + \sum_{\phi} \gamma_{\phi}^{(1)} \mathcal{N}_{\phi} S_{\text{cl}} + O(\hbar^2) = \\ &= -\beta^{(1)} L_g + \sum_{\phi} \gamma_{\phi}^{(1)} L_{\phi} + O(\hbar^2), \end{aligned} \quad (5.39)$$

donde L_g y cada L_{ϕ} viene dados por la ec. (5.4) como una combinación lineal de los monomios $S_{\text{cl}} \dots$ correspondientes de la acción clásica S_{cl} de partida.

** Paso 2: Uso de la identidad de Bonneau*

En el caso del modelo quiral que nos ocupa ya no hay renormalización multiplicativa y en los cálculos de los diagramas aparecerán objetos “con gorro” por lo que el argumento general expuesto en el paso 2 del modelo vectorial de la sección anterior ya no funciona. No queda más remedio que utilizar la fórmula de Bonneau dada por la ec. (5.8) que expresa a cualquier orden en \hbar la acción de $\frac{\partial}{\partial \mu}$ sobre el funcional 1PI renormalizado por substracción mínima en términos de inserciones de operadores evanescentes y no evanescentes.

La lista de operadores evanescentes que pueden ser generados por dicha fórmula es:

** a) Monomios con sólo campos A*

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{W}}_1^{ab} &\equiv \int (\partial_{\bar{\mu}} \partial_{\bar{\nu}} A^{a\bar{\mu}}) A^{b\bar{\nu}}, & \bar{\mathcal{W}}_2^{ab} &\equiv \int (\bar{\square} A_{\bar{\mu}}^a) A^{b\bar{\mu}}, \\
\bar{\mathcal{W}}_3^{abc} &\equiv \int (\partial_{\bar{\mu}} A_{\bar{\nu}}^a) A^{b\bar{\mu}} A^{c\bar{\nu}}, & \bar{\mathcal{W}}_4^{abc} &\equiv \int (\partial_{\bar{\mu}} A^{a\bar{\mu}}) A_{\bar{\nu}}^b A^{c\bar{\nu}}, \\
\bar{\mathcal{W}}_5^{abc} &\equiv \int \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} (\partial^\alpha A^{b\bar{\mu}}) A^{a\bar{\nu}} A^{c\bar{\rho}}, \\
\bar{\mathcal{W}}_6^{a_1 a_2 a_3 a_4} &\equiv \int A_{\bar{\mu}}^{a_1} A^{a_2 \bar{\mu}} A_{\bar{\nu}}^{a_3} A^{a_4 \bar{\nu}} = \bar{\mathcal{W}}_6^{\{a_1 a_2\} \{a_3 a_4\}}, \\
\bar{\mathcal{W}}_7^{a_1 a_2 a_3 a_4} &\equiv \int \varepsilon_{\mu\nu\rho\delta} A^{a_1 \mu} A^{a_2 \nu} A^{a_3 \rho} A^{a_4 \delta}.
\end{aligned}$$

* b) Monomios que implican fermiones pero no campos externos

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{W}}_8^{ij} &\equiv \int \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \bar{\gamma}^\mu P_L \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\bar{\mu}} \psi_j, & \bar{\mathcal{W}}_9^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}_i \bar{\gamma}^\mu P_L \psi_j A_{\bar{\mu}}^a, \\
\bar{\mathcal{W}}_{10}^{ij} &\equiv \int \frac{i}{2} \bar{\psi}'_i \bar{\gamma}^\mu P_R \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\bar{\mu}} \psi'_j, & \bar{\mathcal{W}}_{11}^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}'_i \bar{\gamma}^\mu P_R \psi'_j A_{\bar{\mu}}^a, \\
\bar{\mathcal{W}}_{12}^{ij} &\equiv \int \frac{i}{2} \bar{\psi}_i \bar{\gamma}^\mu P_R \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\bar{\mu}} \psi_j, & \bar{\mathcal{W}}_{13}^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}_i \bar{\gamma}^\mu P_R \psi_j A_{\bar{\mu}}^a, \\
\bar{\mathcal{W}}_{14}^{ij} &\equiv \int \frac{i}{2} \bar{\psi}'_i \bar{\gamma}^\mu P_L \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\bar{\mu}} \psi'_j, & \bar{\mathcal{W}}_{15}^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}'_i \bar{\gamma}^\mu P_L \psi'_j A_{\bar{\mu}}^a.
\end{aligned}$$

* c) Monomios que implican fantasmas pero no campos externos

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{W}}_{16}^{ab} &\equiv \int -\bar{\omega}^a \bar{\square} \omega^b = \int (\partial_{\bar{\mu}} \bar{\omega}^a) (\partial^{\bar{\mu}} \omega^b), \\
\bar{\mathcal{W}}_{17}^{abc} &\equiv \int \bar{\omega}^a \partial^{\bar{\mu}} (\omega^c A_{\bar{\mu}}^b), & \bar{\mathcal{W}}_{18}^{abc} &\equiv \int \bar{\omega}^a (\partial^{\bar{\mu}} A^{b\bar{\mu}}) \omega^c, \\
\bar{\mathcal{W}}_{19}^{abcd} &\equiv \int \bar{\omega}^a \omega^b A^{c\bar{\mu}} A_{\bar{\mu}}^d, & \bar{\mathcal{W}}_{20}^{abcd} &\equiv \int \bar{\omega}^a \bar{\omega}^b \omega^c \omega^d.
\end{aligned}$$

* d) Monomios que implican campos externos

$$\begin{aligned}
\bar{\mathcal{W}}_{21}^{ij a} &\equiv \int \omega^a \bar{L}_i P_L \psi_j, & \bar{\mathcal{W}}_{22}^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}_i P_R \omega^a L_j, \\
\bar{\mathcal{W}}_{23}^{ij a} &\equiv \int \omega^a \bar{R}_i P_R \psi'_j, & \bar{\mathcal{W}}_{24}^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}'_i P_L \omega^a R_j, \\
\bar{\mathcal{W}}_{25}^{ij a} &\equiv \int \omega^a \bar{L}_i P_R \psi_j, & \bar{\mathcal{W}}_{26}^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}_i P_L \omega^a L_j, \\
\bar{\mathcal{W}}_{27}^{ij a} &\equiv \int \omega^a \bar{R}_i P_L \psi'_j, & \bar{\mathcal{W}}_{28}^{ij a} &\equiv \int \bar{\psi}'_i P_R \omega^a R_j, \\
\bar{\mathcal{W}}_{29}^{ab} &\equiv \int \rho_{\bar{\mu}}^a \partial^{\bar{\mu}} \omega^b, & \bar{\mathcal{W}}_{30}^{abc} &\equiv \int \rho_{\bar{\mu}}^a \omega^b A^{c\bar{\mu}}, \\
\bar{\mathcal{W}}_{31}^{abc} &\equiv \int \zeta^a \omega^b \omega^c.
\end{aligned}$$

La ec. (5.8) conduce entonces a un desarrollo en la forma de la ec. (5.9), que en el orden \hbar^1 es

$$\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{31} \sum_{A_i} \bar{r}_i^{(1), A_i} \mathcal{W}_i^{A_i} + O(\hbar^2), \quad (5.40)$$

donde A_i denota el conjunto de índices del grupo de “gauge”, $\mathcal{W}_i^{A_i}$ denota el correspondiente monomio en 4 dimensiones y los coeficientes $\bar{r}_i^{(1), A_i}$ vienen dados por las fórmulas siguientes, válidas a todos los órdenes pero que hemos evaluado calculando los correspondientes diagramas (véase la ref. [19]) en el orden \hbar^1 :

$$\bar{r}_1^{ab} = \frac{(-i)^2}{2} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_{\mu}^a(p_1) A_{\nu}^b(p_2 \equiv -p_1) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^\mu \bar{p}_1^\nu =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \delta^{ab} \left[T_{L+R} \frac{2}{3} - C_A \left(\frac{5}{3} + \frac{1-\alpha'}{2} \right) \right] + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_2^{ab} &= \frac{(-i)^2}{2} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2 \equiv -p_1) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^2 \bar{g}^{\mu\nu} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \delta^{ab} \left[T_{L+R} \frac{2}{3} - C_A \left(\frac{5}{3} + \frac{1-\alpha'}{2} \right) \right] + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_3^{abc} &= \frac{(-i)}{3} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2) A_\rho^c(p_3 \equiv -p_1 - p_2) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^\nu \bar{g}^{\mu\rho} + \\
&\quad + \frac{(-i)}{3} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^c(p_2) A_\rho^b(p_3 \equiv -p_1 - p_2) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^\rho \bar{g}^{\mu\nu} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} c^{abc} \left[\frac{2}{3} T_{L+R} - C_A \left(\frac{2}{3} + \frac{3(1-\alpha')}{4} \right) \right] + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_4^{abc} &= \frac{(-i)}{3} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2) A_\rho^c(p_3 \equiv -p_1 - p_2) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^\mu \bar{g}^{\nu\rho} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{2}{3} c^{abc} \left[\frac{2}{3} T_{L+R} - C_A \left(\frac{2}{3} + \frac{3(1-\alpha')}{4} \right) \right] + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_5^{abc} &= \frac{(-i)}{3} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_\mu^a(p_1) A_\nu^b(p_2) A_\rho^c(p_3 \equiv -p_1 - p_2) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^\alpha \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} = \\
&= 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_6^{\{a_1 a_2\} \{a_3 a_4\}} &= r_6^{\{a_3 a_4\} \{a_1 a_2\}} = \\
&= \frac{1}{8} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_{\mu_1}^{a_1} A_{\mu_2}^{a_2} A_{\mu_3}^{a_3} A_{\mu_4}^{a_4} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{g}^{\mu_1 \mu_2} \bar{g}^{\mu_3 \mu_4} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{8} \left[\frac{4}{3} T_{L+R} + 2 C_A \left(\frac{1}{3} - (1-\alpha') \right) \right] \\
&\quad (c^{ea_1 a_3} c^{ea_4 a_2} - c^{ea_1 a_4} c^{ea_2 a_3}) + O(\hbar^2), \tag{5.41} \\
\bar{r}_7^{a_1 a_2 a_3 a_4} &= r_7^{\{a_1 a_2 a_3 a_4\}} = \\
&= \frac{1}{4!} \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle A_{\mu_1}^{a_1} A_{\mu_2}^{a_2} A_{\mu_3}^{a_3} A_{\mu_4}^{a_4} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \varepsilon_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_8^{ij} &= i \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi_{\beta j}(-p) \bar{\psi}_{\alpha i}(p) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\not{p}} P_L)_{\alpha\beta} = \frac{i}{(4\pi)^2} 2g^2 \alpha' C_L + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_9^{ij a} &= i \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \psi_{\beta j} \bar{\psi}_{\alpha i} A_a^\mu \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\gamma}^\mu P_L)_{\alpha\beta} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} 2g^2 C_L \left[\left(1 - \frac{1-\alpha'}{4} \right) C_A + \alpha' C_L \right] (T_L^a)_{ij} + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{10}^{ij} &= i \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi'_{\beta j}(-p) \bar{\psi}'_{\alpha i}(p) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\not{p}} P_R)_{\alpha\beta} = \frac{i}{(4\pi)^2} 2g^2 \alpha' C_R + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{11}^{ij a} &= i \text{coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \psi'_{\beta j} \bar{\psi}'_{\alpha i} A_a^\mu \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\gamma}^\mu P_R)_{\alpha\beta} = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} 2g^2 C_R \left[\left(1 - \frac{1-\alpha'}{4} \right) C_A + \alpha' C_R \right] (T_R^a)_{ij} + O(\hbar^2),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{r}_{12}^{ij} &= i \text{ coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi_{\beta j}(-p) \bar{\psi}_{\alpha i}(p) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\not{p}} P_R)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{13}^{ij a} &= i \text{ coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \psi_{\beta j} \bar{\psi}_{\alpha i} A_a^\mu \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\gamma}^\mu P_R)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{14}^{ij} &= i \text{ coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi'_{\beta j}(-p) \bar{\psi}'_{\alpha i}(p) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\not{p}} P_L)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{15}^{ij a} &= i \text{ coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \psi'_{\beta j} \bar{\psi}'_{\alpha i} A_a^\mu \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (\bar{\gamma}^\mu P_L)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{16}^{ab} &= i \text{ coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \omega^b(-p) \bar{\omega}^a(-p) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}^2 = -\frac{1}{(4\pi)^2} C_A g^2 (1 + \frac{1-\alpha'}{2}) + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{17}^{abc} &= (-i) \text{ coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \omega^c(-p_1 - p_2) \bar{\omega}^a(p_1) A_\mu^b(p_2) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^\mu = \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} C_A g^2 \alpha' c^{abc} + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{18}^{abc} &= (-i) \text{ coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \omega^c(-p_1 - p_2) \bar{\omega}^a(p_1) A_\mu^b(p_2) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_2^\mu = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{19}^{abcd} &= \frac{1}{2} \text{ coef. del r.s.p. } (-i) \overline{\langle \omega^b \bar{\omega}^a A_\mu^b A_\nu^d \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{g}^{\mu\nu} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{20}^{abcd} &= \frac{1}{4} \text{ r.s.p. } (-i) \overline{\langle \omega^d \omega^c \bar{\omega}^b \bar{\omega}^a \rangle}^{1\text{PI}} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{21}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi_{j\beta} \omega^a; s \psi_{i\alpha} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_L)_{\alpha\beta} = \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A (T_L^a)_{ij} + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{22}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a \bar{\psi}_{i\alpha}; s \bar{\psi}_{j\beta} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_R)_{\alpha\beta} = \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A (T_L^a)_{ij} + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{23}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi'_{j\beta} \omega^a; s \psi'_{i\alpha} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_R)_{\alpha\beta} = \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A (T_R^a)_{ij} + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{24}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a \bar{\psi}'_{i\alpha}; s \bar{\psi}'_{j\beta} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_L)_{\alpha\beta} = \frac{i}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A (T_R^a)_{ij} + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{25}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi_{j\beta} \omega^a; s \psi_{i\alpha} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_R)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2) \\
\bar{r}_{26}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a \bar{\psi}_{i\alpha}; s \bar{\psi}_{j\beta} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_L)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2) \\
\bar{r}_{27}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \psi'_{j\beta} \omega^a; s \psi'_{i\alpha} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_L)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2) \\
\bar{r}_{28}^{ij a} &= \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a \bar{\psi}'_{i\alpha}; s \bar{\psi}'_{j\beta} \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } (P_R)_{\alpha\beta} = 0 + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{29}^{ab} &= (-i) \text{ coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^b(p_1); s A_\mu^a(p_2 = -p_1) \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^\mu = \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^2} \delta^{ab} C_A g^2 (1 + \frac{1-\alpha'}{2}) + O(\hbar^2), \\
\bar{r}_{30}^{abc} &= (-i) \text{ coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^b A_\mu^c; s A_\nu^a \rangle}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{g}_{\mu\nu} = -\frac{1}{(4\pi)^2} c^{abc} C_A g^2 + O(\hbar^2), \\
r_{31}^{abc} &= \frac{1}{2} \text{ r.s.p. } \overline{\langle \omega^c \omega^b; s \omega^a \rangle}^{1\text{PI}} = -\frac{1}{2} \frac{1}{(4\pi)^2} c^{abc} C_A g^2 + O(\hbar^2).
\end{aligned}$$

Utilizando las siguientes identidades

$$\begin{aligned}
S_{\text{cl } AA} &= \frac{\delta^{ab}}{2g^2} (\mathcal{W}_1^{ab} - \mathcal{W}_2^{ab}), & S_{\text{cl } AAA} &= -\frac{c^{abc}}{g^2} \mathcal{W}_3^{abc}, \\
S_{\text{cl } AAA} &= -\frac{1}{8g^2} (c_{ace}c_{bde} + c_{bce}c_{ade}) \mathcal{W}_6^{\{ab\}\{cd\}}, \\
S_{\text{cl } \bar{\psi}\psi}^{\text{L}} &= \delta_{ij} \mathcal{W}_8^{ij}, & S_{\text{cl } \bar{\psi}\psi A} &= (T_{\text{L}}^a)_{ij} \mathcal{W}_9^{ij}, \\
S_{\text{cl } \bar{\psi}'\psi'}^{\text{R}} &= \delta_{ij} \mathcal{W}_{10}^{ij}, & S_{\text{cl } \bar{\psi}'\psi' A} &= (T_{\text{R}}^a)_{ij} \mathcal{W}_{11}^{ij}, \\
S_{\text{cl } \bar{\omega}\omega} &= \delta^{ab} \mathcal{W}_{16}^{ab}, & S_{\text{cl } \bar{\omega}\omega A} &= -c^{abc} \mathcal{W}_{17}^{abc}, \\
S_{\text{cl } \bar{L}s\psi} &= i (T_{\text{L}}^a)_{ij} \mathcal{W}_{21}^{ij a}, & S_{\text{cl } \bar{L}s\bar{\psi}} &= i (T_{\text{L}}^a)_{ij} \mathcal{W}_{22}^{ij a}, \\
S_{\text{cl } \bar{R}s\psi'} &= i (T_{\text{R}}^a)_{ij} \mathcal{W}_{23}^{ij a}, & S_{\text{cl } \bar{R}s\bar{\psi}'} &= i (T_{\text{L(R)}}^a)_{ij} \mathcal{W}_{24}^{ij a}, \\
S_{\text{cl } \rho\omega} &= \delta^{ab} \mathcal{W}_{29}^{ab}, & S_{\text{cl } \rho\omega A} &= -c^{abc} \mathcal{W}_{30}^{abc}, \\
S_{\text{cl } \zeta\omega\omega} &= -\frac{1}{2} c^{abc} \mathcal{W}_{31}^{abc},
\end{aligned}$$

resultando que la contribución de primer orden en \hbar a $\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu}$ puede escribirse así:

$$\begin{aligned}
\mu \frac{\partial \Gamma_{\text{Ren}}}{\partial \mu} &= \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\frac{8}{3} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} - C_A \left(\frac{10}{3} + (1 - \alpha') \right) \right] S_{\text{cl } AA} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\frac{8}{3} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} - C_A \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}(1 - \alpha') \right) \right] S_{\text{cl } AAA} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\frac{8}{3} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} - C_A \left(-\frac{2}{3} + 2(1 - \alpha') \right) \right] S_{\text{cl } AAAA} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 C_{\text{L}} 2 \alpha' S_{\text{cl } \bar{\psi}\psi}^{\text{L}} + \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 C_{\text{R}} 2 \alpha' S_{\text{cl } \bar{\psi}'\psi'}^{\text{R}} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\left(2 - \frac{(1 - \alpha')}{2} \right) C_A + 2 \alpha' C_{\text{L}} \right] S_{\text{cl } \bar{\psi}\psi A} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\left(2 - \frac{(1 - \alpha')}{2} \right) C_A + 2 \alpha' C_{\text{R}} \right] S_{\text{cl } \bar{\psi}'\psi' A} \\
&- \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left(1 + \frac{(1 - \alpha')}{2} \right) C_A S_{\text{cl } \bar{\omega}\omega} + \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A S_{\text{cl } \bar{\omega}\omega A} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A [S_{\text{cl } \bar{L}s\psi} + S_{\text{cl } \bar{R}s\psi'} + S_{\text{cl } \bar{L}s\bar{\psi}} + S_{\text{cl } \bar{R}s\bar{\psi}'}] \\
&- \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left(1 + \frac{(1 - \alpha')}{2} \right) C_A S_{\text{cl } \rho\omega} + \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A S_{\text{cl } \rho\omega A} \\
&+ \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A S_{\text{cl } \zeta\omega\omega} + O(\hbar^2)
\end{aligned} \tag{5.42}$$

donde, $T_{\text{L+R}}$ implica una suma sobre todas las representaciones “levógiras” y “dextrógiras”, es decir sobre todos los “sabores” del modelo.

* *Paso3: Planteamiento del sistema*

Comparando las ecs. (5.36) y (5.9), orden a orden, se llega a un sistema sobredeterminado de ecuaciones lineales cuyas incógnitas son los coeficientes β y γ_ϕ :

$$-\beta w_{gi} + \sum_{\phi} \gamma_{\phi} w_{\phi i} = \bar{r}_i + \sum_j \hat{r}'_j c_{ji} \quad (5.43)$$

donde el índice i recorre todos los elementos de la base de operadores no evanescentes $\{\bar{\mathcal{W}}_i\}$ y los coeficientes c_{ji} son los dados por el desarrollo de los monomios anómalos de la ec. (5.38).

En nuestro modelo de ejemplo y a un “loop”, este sistema lineal, con alguna redundancia ya eliminada, será el mismo que el dado por la igualación de los lados izquierdos de las ecs. (5.42) y (5.39):

$$\begin{aligned}
* \text{ De } S_{\text{cl AA}} &\rightarrow 2\beta^{(1)} + 2\gamma_A^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\frac{8}{3} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} - C_A \left(\frac{10}{3} + (1 - \alpha') \right) \right], \\
* \text{ De } S_{\text{cl AAA}} &\rightarrow 2\beta^{(1)} + 3\gamma_A^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\frac{8}{3} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} - C_A \left(\frac{4}{3} + \frac{3}{2}(1 - \alpha') \right) \right], \\
* \text{ De } S_{\text{cl AAAA}} &\rightarrow 2\beta^{(1)} + 4\gamma_A^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\frac{8}{3} \frac{T_{\text{L+R}}}{2} - C_A \left(-\frac{2}{3} + 2(1 - \alpha') \right) \right], \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\psi} \psi}^{\text{L}} &\rightarrow 2\gamma_{\psi}^{\text{L}(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 C_{\text{L}} 2\alpha', \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\psi}' \psi'}^{\text{R}} &\rightarrow 2\gamma_{\psi'}^{\text{R}(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 C_{\text{R}} 2\alpha', \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\psi} \psi \text{ A}}^{\text{L}} &\rightarrow 2\gamma_{\psi}^{\text{L}(1)} + \gamma_A^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\left(2 - \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A + 2\alpha' C_{\text{L}} \right], \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\psi}' \psi' \text{ A}}^{\text{R}} &\rightarrow 2\gamma_{\psi'}^{\text{R}(1)} + \gamma_A^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left[\left(2 - \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A + 2\alpha' C_{\text{R}} \right], \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\omega} \omega} &\rightarrow -\gamma_A^{(1)} + \gamma_{\omega}^{(1)} = -\frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left(1 + \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\omega} \omega \text{ A}} &\rightarrow \gamma_{\omega}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\text{L}} \text{S} \psi} &\rightarrow \gamma_{\omega}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \bar{\text{R}} \text{S} \psi'} &\rightarrow \gamma_{\omega}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \text{L} \text{S} \bar{\psi}} &\rightarrow \gamma_{\omega}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \text{R} \text{S} \bar{\psi}'} &\rightarrow \gamma_{\omega}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \rho \omega} &\rightarrow -\gamma_A^{(1)} + \gamma_{\omega}^{(1)} = -\frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left(1 + \frac{(1-\alpha')}{2} \right) C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \rho \omega \text{ A}} &\rightarrow \gamma_{\omega}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A, \\
* \text{ De } S_{\text{cl } \zeta \omega \omega} &\rightarrow \gamma_{\omega}^{(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A.
\end{aligned} \quad (5.44)$$

Nótese que en el sistema no intervienen los contratérminos finitos añadidos de orden \hbar^1 ni ha sido necesario considerar los monomios evanescentes en las fórmulas de Bonneau. Ambas cosas serían imprescindibles a la hora de plantear correctamente el sistema (5.43) a orden \hbar^2 .

* *Paso 4: Relaciones entre las constantes del sistema*

Para llegar a (5.44) se han calculado de forma explícita los coeficientes de la fórmula de Bonneau (5.8), por lo que no hay que tener en cuenta ninguna relación entre constantes adicional como hicimos en el caso del modelo vectorial de la sección anterior.

* *Paso 5: Resolución del sistema*

El sistema lineal sobredeterminado (5.44) resulta ser compatible (lo que supone una comprobación de la corrección del cálculo) y su solución única es:

$$\begin{aligned}
 \beta^{(1)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left(\frac{4}{3} \frac{T_{L+R}}{2} - \frac{11}{3} C_A \right), \\
 \gamma_A^{(1)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left(2 - \frac{1-\alpha'}{2} \right) C_A, \\
 \gamma_\omega^{(1)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_A, \\
 \gamma_\psi^{L(1)} &= \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_L, \quad \gamma_{\psi'}^{R(1)} = \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \alpha' C_R.
 \end{aligned} \tag{5.45}$$

Por supuesto, para calcular de forma práctica la función beta y las dimensiones anómalas del modelo no es necesario evaluar los 31 coeficientes de la ec. (5.40), sino que es suficiente con calcular unos pocos de ellos, ya que hay una gran sobredeterminación en el sistema lineal final. Por ejemplo, con $\bar{r}_1^{(1)ab}$, $\bar{r}_8^{(1)ij}$, $\bar{r}_{10}^{(1)ij}$, $\bar{r}_{16}^{(1)ab}$ y $\bar{r}_{17}^{(1)abc}$ bastaría.

Nótese que, a un “loop”, se obtiene el mismo resultado que en las correspondientes teorías vectoriales [116].

* *Paso 6 (opcional): Transformación a las variables de campo habituales*

Naturalmente, como en el caso vectorial, puede elegirse la parametrización de los campos en el nivel árbol tal que los vértices fermiónico y de tres bosones lleve el factor de acoplamiento g y el vértice de cuatro bosones sea proporcional a g^2 . La misma transformación que se dio de forma explícita en el caso vectorial puede hacerse aquí para llegar a las expresiones de las nuevas dimensiones anómalas (véanse dichas expresiones en [19]).

PARTE II:

*Regularización dimensional
en teorías gauge
sobre el espacio plano
no conmutativo.*

Capítulo 1.

Teorías de campos sobre espacios no conmutativos.

1.1. Introducción a la geometría no conmutativa

La concepción habitual de espacio geométrico se basa en la noción matemática de variedad diferenciable, es decir de puntos etiquetados por coordenadas reales, y los campos sobre este tipo de espacios son entonces meras funciones de los puntos. Se espera que esta concepción no sea válida a distancias muy cortas, quizás del orden de la longitud de Planck, o a energías muy altas. Entre las diferentes alternativas planteadas está la de utilizar espacios no conmutativos, a modo de “cuantización” del propio espacio o del espacio-tiempo.

Ya desde los primeros días de la teoría cuántica de campos algunos, como Heisenberg, sugirieron [117], que el uso de una estructura no conmutativa en las propias coordenadas espaciales, además de las usuales del espacio de fases, podría proporcionar un regulador natural para las divergencias en el ultravioleta [118-120]. El éxito de la teoría de la renormalización influyó en que esta vía de investigación se abandonara. De hecho, mucho más tarde se acabaron construyendo modelos sobre esferas no conmutativas en los que la deformación no conmutativa regularizaba la divergencia ultravioleta de la teoría conmutativa correspondiente [121,122].

En [123,124] la conjunción de la teoría de la relatividad general y de los principios de incertidumbre conduce también a la idea de considerar el espacio-tiempo de Minkowski con una incertidumbre inherente en la localización espacio-temporal: para “medir” puntos del espacio-tiempo con precisión arbitrariamente pequeña, se necesitaría una cantidad muy grande de energía, tan grande, que al final por la relatividad general se llegarían a formar miniagujeros negros que impedirían la localización más allá de su horizonte. De la teoría de campos en el espacio-tiempo plano no conmutativo, con alguna hipótesis, de hecho, se deducen principios de incertidumbre para todas las coordenadas (los razonamientos siguientes son heurísticos, véanse [123-129] para discusiones más rigurosas).

Si un espacio de fases cuántico se define reemplazando las variables clásicas x^i , p_j por operadores hermíticos \hat{x}^i , \hat{p}_j que obedecen las relaciones de conmutación de Heisenberg $[\hat{x}^i, \hat{p}_j] = \delta^i_j$, lo que tiene como consecuencia las famosas relaciones de incertidumbre, en un espacio (quizás espacio-tiempo) cuántico puede parecer natural imponer

$$[\hat{x}^\mu, \hat{x}^\nu] = i \theta^{\mu\nu} \quad (1.1)$$

donde al igual que el álgebra de operadores generada por la posición y el momento no es conmutativa, la generada por (1.1) tampoco lo será, y se tendrá una relación entre las incertidumbres de coordenadas espaciales o incluso las espacio-temporales:

$$\Delta x^\mu \Delta x^\nu \geq \frac{1}{2} |\theta^{\mu\nu}| \quad (1.2)$$

θ es una matriz real antisimétrica de números constantes en el caso más simple.

Puede decirse que los puntos del espacio-tiempo se reemplazan por “celdas” del área del orden de θ . Esta “difuminación” del espacio era la base las esperanzas de que mejoraran las divergencias de las teorías de campos. De hecho, luego acabaría viéndose, que, en general, esto no es así.

Connes dio rigor matemático al concepto de geometría no conmutativa en espacios generales [125], introduciendo además un cálculo diferencial [126-129]. Se construyeron modelos con campos Yang-Mills sobre el toro no conmutativo [130,131] así como el famoso modelo [132,133] en el que el modelo estándar, con alguna restricción, resulta ser la interpretación de un espacio especial no conmutativo proporcionando una posible explicación del campo de Higgs como bosón de “gauge”.

La geometría no conmutativa también apareció de forma independiente en el contexto de la teoría de cuerdas abiertas [134] y D -branas [135]. Dentro del mismo contexto, en [136] se argumentó en favor de una relación de incertidumbre en la determinación de las distancias espacio-temporales. Nuevamente Connes junto con Douglas y Schwarz [137], en su estudio de las compactificaciones toroidales del modelo de matrices en teoría de cuerdas, llegaron de forma explícita a una teoría gauge super Yang-Mills sobre un toro no conmutativo, interpretándose como el efecto de un campo de fondo tensorial de Neveu-Schwartz B no nulo. Por otro lado, se encontró que cierto límite de baja energía de una teoría de cuerdas abiertas que acaban en una pila (“stack”) de N Dp -branas sobre los que hay un campo magnético constante es una teoría de campos “gauge” sobre el espacio-tiempo no conmutativo $\mathbb{R}_{\text{NC}}^p \times \mathbb{R}$ con grupo “gauge” (no conmutativo) $U(N)$ [138].

Esta conexión de la geometría no conmutativa basada en (1.1) y la teoría de cuerdas ha disparado el interés y el número de publicaciones en los últimos años por las teorías cuánticas de campos sobre espacios planos no conmutativos. Otro escenario donde aparece este tipo de geometría no conmutativa es la descripción efectiva del movimiento de electrones en el primer nivel de Landau ante un campo magnético intenso [139,140].

1.2. Espacio-tiempo plano no conmutativo

Este caso específico de espacio no conmutativo, tanto en su forma euclídea como de Minkowski, es una generalización del procedimiento de cuantización usual de mecánica cuántica ordinaria. En esta presentación no se hará ningún esfuerzo de rigor matemático; para desarrollos más rigurosos véanse [125-129] y sus referencias. Tomando a \hat{x}^μ como los generadores del álgebra no conmutativa de operadores que satisfacen (1.1), se elige como correspondencia unívoca entre el álgebra de campos sobre R^D y el álgebra de operadores la prescripción simétrica de Weyl [141], que “respeta” la descomposición de Fourier y que en este caso se leería así:

$$\hat{\mathcal{W}}[\phi] \equiv \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k) e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} \quad (1.3)$$

Así tenemos asociado a cada campo clásico o función del espacio-tiempo un operador que actuará sobre un espacio de Hilbert construible con los operadores de creación y destrucción relacionados con las coordenadas no conmutantes [142]. Teniendo en cuenta la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff está claro que si $\theta^{\mu\nu} \neq 0$, la cuantización de cada función no será nada trivial. Así, si $\theta^{\mu\nu} \neq 0$ es una constante, lo que asumiremos a partir de ahora, entonces se tiene

$$e^{ik_\mu \hat{x}^\mu} e^{ik'_\mu \hat{x}^\mu} = e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} e^{i(k+k')_\mu \hat{x}^\mu}, \quad (1.4)$$

con lo que puede demostrarse la relación (véanse [143, 144] para una prueba didáctica)

$$\hat{\mathcal{W}}[\phi_1] \hat{\mathcal{W}}[\phi_2] = \hat{\mathcal{W}}[\phi_1 * \phi_2] \quad (1.5)$$

donde $*$ es el producto “estrella” o de “Groenewold-Moyal” [145,146], frecuentemente abreviado como de “Moyal”:

$$\begin{aligned} \phi_1(x) * \phi_2(x) &= \int \int \frac{dk}{(2\pi)^D} \frac{dk'}{(2\pi)^D} e^{ix(k+k')} e^{-\frac{i}{2}\theta^{\mu\nu} k_\mu k'_\nu} \tilde{\phi}_1(k) \tilde{\phi}_2(k') \\ &= \phi_1(x) \exp\left(\frac{i}{2} \overleftarrow{\partial}_\mu \theta^{\mu\nu} \overrightarrow{\partial}_\nu\right) \phi_2(x) \\ &= \phi_1(x) \phi_2(x) \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{i}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \theta^{\mu_1 \nu_1} \dots \theta^{\mu_n \nu_n} (\partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi_1(x)) (\partial_{\nu_1} \dots \partial_{\nu_n} \phi_2(x)). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Debido a que de ahora en adelante esta combinación aparecerá con frecuencia, introducimos la notación $\omega(p, q) \equiv -\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu} p_\mu q_\nu$.

Una forma equivalente de reescribir (1.6) es

$$\phi_1(x) * \phi_2(x) = \int ds \int \frac{dk}{(2\pi)^D} e^{iks} \phi_1\left(x - \frac{1}{2}\tilde{k}\right) \phi_2(x + s), \quad \tilde{k} \equiv k_\mu \theta^{\mu\nu}, \quad (1.7)$$

que hace más patente la no localidad del producto.

Es decir, gracias a (1.5), existe una realización del álgebra no conmutativa de los operadores en términos de funciones usuales sobre el espacio conmutativo pero con un producto deformado [147] especial: el producto de Moyal. Nótese cómo para $\theta = 0$ se recupera el producto ordinario de funciones.

De (1.6) se ve inmediatamente que el producto de Moyal es asociativo. Aplicando sucesivamente (1.6), se obtiene para el producto de Moyal de varios campos:

$$\phi_1(x) * \cdots * \phi_n(x) = \left[\prod_{i < j}^n \exp \frac{i}{2} \theta^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x_i^\mu} \frac{\partial}{\partial x_j^\nu} \phi_1(x_1) \cdots \phi_n(x_n) \right]_{x_1 = \cdots = x_n = x}. \quad (1.8)$$

Si se define el operador “derivada” como el operador derivación lineal antihermítico que satisface

$$[\hat{\partial}_i, \hat{x}^j] = \delta_i^j, \quad [\hat{\partial}_i, \hat{\partial}_j] = 0 \quad (1.9)$$

entonces se cumple $[\hat{\partial}_i, \hat{\mathcal{W}}[f]] = \hat{\mathcal{W}}[\partial_i f]$.

Por último, si se asume que los términos de superficie se anulan, la integral del producto de Moyal de dos campos satisface:

$$\int d^D x \phi_1(x) * \phi_2(x) = \int d^D x \phi_1(x) \phi_2(x)$$

lo que permite introducir la traza cíclica

$$\text{Tr} \left(\hat{\mathcal{W}}[f_1] \cdots \hat{\mathcal{W}}[f_n] \right) = \int d^D x f_1(x) * \cdots * f_n(x), \quad (1.10)$$

que coincide con la traza con respecto una base del espacio de Hilbert mencionado antes. Así, resulta natural elegir como acción para el caso ejemplar del campo escalar la siguiente:

$$S[\phi] = \text{Tr} \left(\frac{1}{2} [\hat{\partial}_\mu, \hat{\mathcal{W}}[\phi]]^2 + \frac{m^2}{2} \hat{\mathcal{W}}[\phi]^2 + \frac{\lambda}{4!} \hat{\mathcal{W}}[\phi]^4 \right). \quad (1.11)$$

Nótese que aunque no esté claro cómo definir la teoría cuántica de campos directamente con los operadores $\hat{\mathcal{W}}[\phi]$, podemos tomar como definición de una teoría cuántica de campos sobre el espacio-tiempo no conmutativo a la definida de la forma habitual por la acción de la ec. (1.11), una vez tenidas en cuenta (1.9) y (1.10), es decir

$$S[\phi] = \int d^d x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi(x))^2 + \frac{m^2}{2} \phi(x)^2 + \frac{\lambda}{4!} \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) \right] \quad (1.12)$$

Nótese que aunque en el término libre de la acción el producto de los campos es el ordinario conmutativo, en el término de interacción el producto es el de Moyal, siendo

todo el término de interacción invariante bajo permutaciones cíclicas de los campos. Por tanto, la teoría libre será la misma que en el caso conmutativo.

Por último tratemos la covariancia Lorentz de la teoría no conmutativa. La relación (1.1) y la acción (1.12) son invariantes bajo transformaciones de Lorentz del observador, si bien la dependencia explícita en un tensor constante prefijado puede verse como una violación de la “invariancia de Lorentz de partículas”, es decir bajo “boosts” y rotaciones de las partículas. También queda preservada la invariancia ante translaciones en todos los sentidos, dado que $\theta^{\mu\nu}$ es independiente de las coordenadas espacio-temporales.

Para fijar la nomenclatura, llamaremos componentes “eléctricas” a las componentes θ^{0i} de la matriz antisimétrica $\theta^{\mu\nu}$ y componentes “magnéticas” a sus componentes θ^{ij} , donde i, j recorren las coordenadas espaciales del espacio-tiempo de Minkowski. De forma análoga al tensor antisimétrico del electromagnetismo, se define el vector “eléctrico” $\vec{\theta}_E$ o el vector “magnético” $\vec{\theta}_B$ a partir de las componentes “eléctricas” o “magnéticas”, respectivamente, de $\theta^{\mu\nu}$. De esta forma las matrices $\theta_{\mu\nu}$ posibles pueden clasificarse [148] de forma invariante Lorentz por los valores de los invariantes $I_1 \equiv \vec{\theta}_B^2 - \vec{\theta}_E^2$ e $I_2 \equiv \vec{\theta}_B \cdot \vec{\theta}_E$.

Diremos que la matriz $\theta^{\mu\nu}$ es de “tipo magnético” o “espacial” cuando $I_1 > 0$ e $I_2 = 0$; de “tipo eléctrico” o “temporal” si $I_1 < 0$ e $I_2 = 0$ y de “tipo luz” si $I_1 = 0$ e $I_2 = 0$ (existen otras posibilidades). Si es de “tipo magnética”, entonces existe una transformación de Lorentz que puede anular todas sus componentes “eléctricas”; si es de “tipo eléctrica”, entonces existe una transformación de Lorentz que puede anular todas sus componentes “magnéticas”.

1.3. Teoría perturbativa

Una vez que disponemos de una acción sobre el espacio-tiempo no conmutativo como (1.12), caracterizada por ser la integral espacio-temporal usual de un polinomio formado con productos de Moyal de campos y sus derivadas (lo que denominaremos “términos no-conmutativos locales” aún siendo no locales en el sentido habitual), podemos realizar una teoría de perturbaciones cuántica sin más que introducir la acción en una integral de camino que interpretamos de forma perturbativa, es decir, como la suma formal de los correspondientes diagramas de Feynman.

Obtendremos unas reglas de Feynman covariantes y una serie de diagramas de Feynman, a los que, en general, habrá que asignar una expresión regularizada, por si tienen algún tipo de divergencia. En esta tesis, utilizamos siempre regularización dimensional.

Se ha encontrado que las teorías perturbativas no conmutativas así definidas no son unitarias si la matriz $\theta_{\mu\nu}$ no es “magnética” [149,148,150-152] o de “tipo luz” [148,153] y además presentan violaciones explícitas de la causalidad [154-156,157] para casos con $\theta_{0i} \neq 0$. Para evitar estos problemas, supondremos siempre en nuestros cálculos del capítulo siguiente que $\theta_{\mu\nu}$ es magnética, si bien nunca daremos ningún valor explícito a los componentes ni índices de la matriz $\theta_{\mu\nu}$, utilizando siempre expresiones formalmente covariantes Lorentz.

Reglas de Feynman

A partir de ahora y para abreviar las expresiones, cuando digamos “ordinario” querremos decir “sobre el espacio-tiempo conmutativo, y cuando digamos “no conmutativo” querremos decir “sobre el espacio-tiempo no conmutativo”. Nótese que las teorías “gauge” $U(N)$ ordinarias ya incorporan un grupo no abeliano, por lo que para no incitar a la confusión, las denominaremos “ordinarias” en vez de “conmutativas”.

Las reglas de Feynman que se leen “directamente” de un término de interacción no conmutativo si todos sus productos son productos de Moyal, como por ejemplo el de la acción (1.12):

$$\begin{aligned} \int dx \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) * \phi(x) = \\ = \prod_{i=1}^4 \left[\int \frac{dk_i}{(2\pi)^D} \tilde{\phi}(k_i) \right] (2\pi)^D \delta\left(\sum_{i=1}^4 k_i\right) \Gamma_{\phi^4}(k_1, k_2, k_3, k_4), \end{aligned} \quad (1.13)$$

son básicamente las mismas que para la acción ordinaria correspondiente a excepción de un factor de fase. Así para (1.13) se tiene:

$$\Gamma_{\phi^4}(k_1, k_2, k_3, k_4) = \prod_{i < j} e^{\frac{i}{2}\omega(k_i, k_j)}. \quad (1.14)$$

Además los propagadores son los mismos que los de la teoría ordinaria, por lo que los integrandos de los diagramas de Feynman serán como los de la teoría ordinaria pero con factores de fase dependientes de los momentos externos e internos.

Si los propagadores de los diagramas de Feynman se representan mediante una línea, entonces hay que escribir en los vértices la expresión totalmente simétrica correspondiente a (1.14). Así procederemos en nuestros cálculos explícitos del capítulo siguiente.

Pero para el análisis teórico de las divergencias resulta de gran utilidad introducir la notación de doble línea habitual en los desarrollos en gran N de las teorías “gauge” ordinarias [158,159] y separar (1.14) en sumandos invariantes bajo permutaciones cíclicas de los momentos k_i pero no totalmente simétricos que corresponden a vértices de líneas dobles con sus líneas entrantes o salientes fijadas según un orden cíclico.

Las diferentes contracciones de las líneas de los vértices mediante los propagadores de doble línea dan lugar a diferentes diagramas en notación de doble línea que tendrán asociadas cada uno de ellos un factor de fase no conmutativo diferente.

Los diagramas de Feynman de la representación de los propagadores de una línea, por tanto, pueden separarse en sumandos “planares” y “no planares” que corresponden a diagramas, en la representación gráfica con dobles líneas, con la propiedad topológica del mismo nombre. La parte planar resulta estar compuesta por sumandos cuyo posible factor de fase depende sólo de los momentos externos, mientras que la parte no planar siempre tiene un factor de fase dependiente de los momentos internos [160,122].

Divergencias de los diagramas

En el caso de un sumando planar, al menos a un “loop”, las divergencias en el ultravioleta aparecen en regularización dimensional como polos simples en $D = 4$ cuyo residuo es una suma de monomios locales, siendo cada monomio el producto de un monomio en los momentos externos (que serán “normales”, es decir, sin ninguna métrica “con gorro” $\hat{g}_{\nu\rho}$, si en la acción de partida no hay objetos quirales y la regularización dimensional elegida de los objetos covariantes es “normal”) y una exponencial compleja cuyo argumento es una combinación lineal de términos del tipo $\omega(p_i, p_j)$ (p_i y p_j denotan momentos externos arbitrarios). Es decir, que corresponderán con lo que denominamos operadores “no conmutativos locales”: operadores polinómicos integrados con productos de Moyal de los campos y sus derivadas.

En el caso de un término no planar, siempre aparece un factor de fase que depende de algún momento interno de un “loop”. Entonces está claro que a un “loop”, y exceptuando los valores concretos de los momentos externos que hacen que se anule el exponente del factor de fase de un sumando, su expresión regularizada dimensionalmente es finita en el límite $D \rightarrow 4$ ya que el factor exponencial oscilante hace las veces de un regulador ultravioleta.

Si se realiza el límite formal $\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$ dentro de la integral regularizada, la parte planar y la no planar tienden a términos que una vez sumados tienen la misma expresión de la teoría ordinaria. En general, los sumandos correspondientes en la expresión ordinaria serán divergentes en el ultravioleta si el diagrama es divergente por conteo de potencias. Pero ya a un “loop” en el caso no conmutativo una de las dos partes, la parte no planar, es finita para casi todo momento externo. Por tanto, la deformación de la parte divergente ultravioleta del integrando no es continua, en general, cuando se pasa de la teoría ordinaria a la teoría no conmutativa. Es decir, el límite $\theta_{\mu\nu} \rightarrow 0$ no es suave, en general, para las teorías cuánticas de campos correspondientes. Este cambio brusco de comportamiento convierte en interesante y nada trivial las siguientes cuestiones:

- i) ¿Las divergencias de todos los diagramas, con sumandos planares y no planares, al menos en teorías con propagadores masivos, se cancelan mediante la adición a la acción de partida de un número finito de contratérminos para las teorías no conmutativas cuyas contrapartidas ordinarias sean renormalizables por conteo de potencias?.
- ii) ¿La invariancia BRS de la teoría renormalizada ordinaria en cuestión se mantiene con la deformación no conmutativa?. ¿Se mantiene la renormalización multiplicativa correspondiente que ya exhiben las teorías Yang-Mills ordinarias?. Si así fuera, se dispondría de una deformación no local de las teorías de Yang-Mills nada trivial que respeta la simetría “gauge” a nivel cuántico, es decir, que es “renormalizable” en todos los sentidos.

Los cálculos realizados a dos “loops” [161] muestran que diagramas exclusivamente planares de ciertas teorías no conmutativas con masa presentan las mismas divergencias

que los correspondientes planares ordinarios pero acompañados de un factor de fase de Moyal. Esto indica que estos diagramas son “renormalizables” en el sentido mínimo de que se pueden substraer sus divergencias en el ultravioleta añadiendo un operador “no conmutativo local”, es decir, polinómico en el producto de Moyal, a la acción regularizada.

Pero, aunque se cumpliera esta renormalizabilidad mínima, en principio, podría ocurrir que estos operadores locales no conmutativos generados radiativamente no estuvieran todos en la acción de partida, lo que haría imposible una “renormalización multiplicativa”, es decir, basada en la renormalización de los campos y parámetros presentes en la acción de partida. Por ejemplo, en la teoría de Yang-Mills no conmutativa con grupo $U(N)$, hay varias posibilidades para formar el término con 4 campos bosónicos utilizando polinomios con el producto de Moyal. Nuestro cálculo explícito, que presentamos en el siguiente capítulo, demuestra que a un “loop” la divergencia en el ultravioleta de cada diagrama de Feynman que contribuye a la función de 4 puntos no presenta la misma forma que el término de la acción de partida, pero sí que lo hace la contribución total dada por la suma de todos los diagramas. Ciertos autores encontraron en un principio [162] que la suma total no presenta la misma forma que el término de la acción de partida, si bien luego corrigieron sus resultados [163], lo que muestra que el resultado que hemos obtenido no es trivial.

Además, como veremos en la sección 1.4, la presencia de diagramas no planares, ya incluso al nivel de “un loop”, genera una divergencia infrarroja en los momentos externos incluso en las teorías con masa. Denominaremos este nuevo tipo de divergencia en el infrarrojo, “divergencias infrarrojas no conmutativas” en contraposición a las habituales divergencias infrarrojas que presentan las teorías de campos locales sin masa. Estas nuevas divergencias pueden ser, para modelos generales de teorías de campos no conmutativos, de tipo cuadrático o lineal y por tanto, conducir a que subdiagramas en órdenes más altos de la teoría de perturbaciones presenten divergencias no integrables que impidan la renormalizabilidad en el sentido mínimo usual, es decir a que no sea suficiente con añadir un número finito de contratérminos “no conmutativos locales” [164,165,166,167].

Ya en [164] se sugería la posibilidad de que en teorías supersimétricas, donde en la teoría ordinaria no aparecen divergencias cuadráticas, mejorase la situación y por tanto pudieran ser teorías renormalizables mediante un número finito de contratérminos con productos de Moyal a todo orden en el número de “loops”. Volveremos sobre esto en el siguiente apartado de este capítulo.

Renormalizabilidad de las simetrías “gauge”

En cuanto a la segunda cuestión, se dio una primera respuesta positiva para el caso de la teoría de Yang-Mills no conmutativa sobre el grupo de “gauge” $U(1)$ y al orden de un “loop” en nuestra publicación [22], que constituía el primer cálculo publicado de las divergencias a un “loop” de una teoría de campos no conmutativa con invariancia “gauge”, así como el primer ejemplo que aparecía en la literatura de cálculo perturbativo cuántico de una teoría “gauge” no conmutativa (es decir, teniendo en cuenta la parte de fijación del “gauge” y los campos “fantasma” así como las correspondientes variaciones

BRS de los campos cuánticos). Nótese que esta teoría, contrariamente a su correspondiente ordinaria, contiene autointeracciones de los bosones de “gauge”, por lo que, en principio, podría ocurrir que no fuera renormalizable multiplicativamente. Más adelante en [168] se calculó para la teoría no conmutativa sobre el grupo de “gauge” $U(N)$ la divergencia a un “loop” de las funciones 1PI con dos y tres bosones externos y en [163] la de la función con cuatro bosones externos, en ambos casos en el “gauge” de Feynman, mostrándose que los resultados eran compatibles con la simetría “gauge”. En nuestro trabajo [21], realizado de forma independiente, se calculó la divergencia de todos los diagramas que contribuyen a un “loop”, incluyendo los que tienen campos “fantasmas” y externos en las líneas externas, y en un gauge de Lorentz general, estableciendo de forma completa la renormalizabilidad de la simetría BRS de la teoría $U(N)$ sobre el espacio no conmutativo plano a un “loop”.

Nótese que la renormalización multiplicativa implica que no todos los monomios que se pueden formar con los campos, sus derivadas y el producto de Moyal aparecerán en las divergencias, y que los coeficientes de los que aparecen deben seguir unas relaciones precisas. Es decir, implica unas cancelaciones importantes entre los diversos diagramas para que la suma de todos los diagramas de Feynman divergentes generen contribuciones con la misma forma que los términos correspondientes de la acción de partida (recuérdese el caso mencionado de la función de 4 puntos) y tal que, además, los coeficientes divergentes de estas estructuras no sean, en principio, valores arbitrarios.

Por supuesto, en estas teorías la renormalización multiplicativa estará muy relacionada con la conservación de la simetría “gauge” o BRS de la teoría cuántica no conmutativa perturbativa por parte del regulador y del esquema de renormalización empleados.

Por tanto, además del problema de la existencia de la teoría renormalizada a un determinado orden en el número de “loops”, hay que responder a la pregunta de si es posible fijar la renormalización de tal forma que satisfaga las identidades de BRS que expresan dicha simetría. A falta de principios de acción cuántica válidos para teorías renormalizadas con acciones no locales que contienen términos de interacción del tipo (1.13), lo mejor que podemos hacer es utilizar métodos de regularización que preserven la simetría correspondiente, y estudiar si la teoría renormalizada así calculada se obtiene por renormalización multiplicativa “infinita” de la acción “desnuda” de partida. Este será el método que se utilizará en el capítulo siguiente, donde emplearemos la regularización dimensional, herramienta básica de esta tesis, y que preserva la simetría “gauge” en la teoría regularizada, llegando a la conclusión mediante cálculos explícitos de que a “un loop” se mantiene la simetría BRS completa de la teoría no conmutativa renormalizada por substracción mínima.

El número de trabajos dedicados al análisis de las divergencias ultravioletas y el problema de la renormalización perturbativa en teorías de campos sobre el espacio plano no conmutativo y al de su influencia en aspectos ya clásicos de la teoría cuántica de campos como la ruptura espontánea de la simetría, las anomalías quirales, las acciones efectivas, etc. es bastante grande, véanse, por ejemplo, [160-197, 139, 83-85].

1.4. El fenómeno de la mezcla UV/IR

En la ref. [165] se descubrió, en relación con el problema de la imposibilidad de cancelar todas las subdivergencias, que existe una conexión característica de las teorías de campos sobre el espacio no conmutativo entre las escalas ultravioleta (UV) e infrarroja (IR), la famosa mezcla UV/IR o “UV/IR mixing” [165,175,176,198-200,196,182,184,187,201-207]: los modos virtuales con grandes momentos que contribuyen a una función de Green por un “loop” planar lo hacen con una divergencia UV de la integral, mientras que cuando se trata de un “loop” no planar lo hacen contribuyendo con un resultado finito a la integral, pero este resultado finito es divergente en el límite IR de alguna combinación lineal de momentos externos. Estas combinaciones aparecen siempre contraídas con $\theta_{\mu\nu}$.

Es decir, los sumandos no planares que habíamos visto que eran finitos, por ejemplo a un “loop”, y para los que el parámetro no conmutativo actúa de regulador efectivo UV, conducen a resultados que son divergentes en el límite IR de momentos externos o de la matriz de no conmutatividad $\theta_{\mu\nu}$ hacia 0. Nótese que estas singularidades para momentos pequeños de la acción efectiva proviene de la integración de los momentos arbitrariamente grandes de los “loops”.

En general, puede verse por análisis dimensional que el grado de divergencia en el IR de la parte no planar de un diagrama será el mismo que el grado de divergencia superficial de divergencia UV de la expresión conmutativa asociada (es decir, con $\theta^{\mu\nu} = 0$ antes de integrar), salvo cancelaciones que puedan reducir alguno o ambos de los grados de divergencias.

En especial, los diagramas no planares que por conteo de potencias tienen divergencias UV cuadráticas o lineales en la teoría ordinaria asociada, podrán tener divergencias de grado cuadráticas o lineales en el límite IR de los momentos externos.

Las divergencias cuadráticas y lineales no son integrables en general, por lo que la inclusión de estos diagramas como subdiagramas podrá causar que alguna integral de un diagrama no sea convergente, pudiendo estropear la renormalizabilidad de la teoría, incluso aún cuando los propagadores de la teoría tenga masa. Para diferenciar este nuevo tipo de divergencia infrarroja del ya conocido en teorías locales sin masa, la denominaremos divergencia infrarroja no conmutativa.

Ejemplo de mezcla UV/IR en la teoría escalar

Veamos un ejemplo explícito de cómo ocurre este fenómeno de la mezcla UV/IR. En la teoría escalar ϕ_\star^n en d dimensiones, los sumandos no planares a un “loop” con N propagadores contienen, además de factores constantes o fases dependientes de los momentos externos, integrales de Feynman de la siguiente estructura

$$\mathcal{I}(p_i) = \int d^d k \, e^{i\tilde{P} \cdot k} \prod_{i=1}^N \frac{i}{(k + k_i)^2 - m^2 + i0}, \quad (1.15)$$

donde P y cada k_i son combinaciones lineales de los N momentos externos p_i .

Introduciendo N parámetros de Feynman x_i de la forma habitual se tiene [150]:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(p_i) &= i^N (N-1)! \int [dx] \int d^d k \frac{e^{i\tilde{P}k}}{[\sum_i (x_i(k+k_i)^2 - m^2) + i0]^N} \\
&= i^N (N-1)! \int [dx] e^{-i\tilde{P} \cdot \sum_{i=1}^N x_i k_i} \int d^d k \frac{e^{i\tilde{P} \cdot k}}{(k^2 - M_x^2)^N} \\
&= 2(-i)^N (2\pi)^{d/2} \int [dx] e^{-i\tilde{P} \cdot \sum_{i=1}^N x_i k_i} (M_x^2)^{d/2-N} \times \\
&\quad \times \frac{K_{d/2-N}[\sqrt{M_x^2(P \circ P)}]}{[\sqrt{M_x^2(P \circ P)}]^{d/2-N}}, \tag{1.16}
\end{aligned}$$

donde

$$\int [dx] \equiv \int_0^1 \left(\prod_{i=1}^N dx_i \right) \delta \left(\sum_{i=1}^N x_i - 1 \right), \tag{1.17}$$

$$M_x^2 = m^2 - i0 - \sum_i x_i (k_i)^2 + \left(\sum_i x_i k_i \right)^2 \tag{1.18}$$

y $P \circ P \equiv -\tilde{P}^2$. Se ha tomado el convenio de que todos los cortes de ramificación se realizan sobre el eje real negativo y K_a representan las funciones de Bessel de segunda especie y orden a . (1.16) es correcta siempre y cuando $m > 0$ y $P \circ P > 0$.

Es fácil ver que para el caso de una matriz $\theta_{\mu\nu}$ de “tipo magnético” o de “tipo luz” $P \circ P \geq 0$, mientras que para el resto de casos $P \circ P$ es negativo para ciertas formas de tender P a 0 (con P real). Por ejemplo, si $\theta^{01} = -\theta^{10} \equiv \theta_E$, $\theta^{23} = -\theta^{32} \equiv \theta_B$ y el resto de componentes son nulas,

$$P \circ P = \theta_E^2 (P_0^2 - P_1^2) + \theta_B^2 (P_2^2 + P_3^2). \tag{1.19}$$

Ya hemos comentado previamente que el caso “magnético” no presenta problemas de pérdida de la unitariedad, al menos a “un loop”. En este caso, por tanto, en (1.16) aparece sólo una singularidad en el infrarrojo cuando $P \circ P \rightarrow 0$.

Así (1.15) para la autoenergía a un “loop” en la teoría escalar ϕ_\star^4 y $d = 4$ es (siempre en el caso de $p \circ p > 0$):

$$\frac{\lambda^4}{4!4\pi^2 p \circ p} - \frac{\lambda^4 m^2}{4!4\pi^2} \ln \left(\frac{1}{m^2 p \circ p} \right) + \text{parte finita}$$

Si se regulariza mediante un corte en el ultravioleta (“cutoff”) Λ_{UV} , tenemos que la contribución de los diagramas planares y no planares puede escribirse como [165]:

$$\frac{\lambda^4}{4!4\pi^2(p \circ p + 1/\Lambda_{UV}^2)} - \frac{\lambda^4 m^2}{4!4\pi^2} \ln \left(\frac{1}{m^2(p \circ p + 1/\Lambda_{UV}^2)} \right) + \text{parte finita},$$

En esta expresión, si se hace el límite $\theta \rightarrow 0$ antes que el del regulador Λ_{UV} tienda hacia infinito, se recuperan las divergencias ultravioletas de la teoría ordinaria correspondiente. Pero para la matriz θ fija y finita las expresiones son finitas cuando el regulador Λ_{UV} tiende a infinito, quedando patente el carácter de regulador ultravioleta de la no conmutatividad de este diagrama no planar.

No localidad e interpretación dipolar

Puede entenderse el origen físico de esta correspondencia UV/IR en términos de la no localidad del producto de Moyal: si un campo ϕ es distinto de cero sólo en una región muy pequeña de tamaño Δ , entonces $\phi \star \phi$ sólo es distinta de cero en una región mucho más grande de tamaño $\frac{\theta}{\Delta}$, donde θ es el orden de la matriz $\theta^{\mu\nu}$ [165]. Por tanto, los modos de altas energías (es decir, pequeñas distancias) de las integrales de los “loops” tienen interacciones de muy largo alcance, y un “cutoff” Λ_{UV} sobre esos modos impone un “cutoff” efectivo en el infrarrojo de orden $\frac{1}{\theta\Lambda}$ sobre los modos de bajas energías de la acción efectiva.

En esta línea, puede interpretarse que una partícula moviéndose con momento P a lo largo de un plano espacial no conmutativo asemeja tener una extensión espacial de tamaño del orden de $|\theta P|$ en la dirección perpendicular dentro de aquel plano [199]. Nótese que a mayor momento, mayor tamaño efectivo. La integración, por tanto, de momentos arbitrariamente altos en un “loop” conduce por tanto a fenómenos de larga distancia como las divergencias IR. Esta interpretación “física” de la no conmutatividad se denomina interpretación dipolar [208-212,199,157].

Teorías no conmutativas sin divergencias infrarrojas dañinas

Teniendo en cuenta todo lo mencionado hasta ahora, resulta muy interesante encontrar teorías no conmutativas renormalizables en el UV que por lo menos no contengan divergencias cuadráticas o lineales en el límite IR no conmutativo, porque entonces podrían ser teorías perturbativas bien definidas. Nótese además que las divergencias infrarrojas no conmutativas cuadráticas de la autoenergía modifican la relación de dispersión de tal forma que pueden dar lugar a inestabilidades taquiónicas [213,214,203,16].

Si las teorías en cuestión únicamente contuvieran divergencias infrarrojas no conmutativas de tipo logarítmico, podrían estar bien definidas pero, en general, no dejarían de poseer esa relación tan peculiar entre las escalas UV/IR que no tiene parangón en las teorías locales ordinarias.

En un principio [165] se conjeturó que habría una correspondencia perfecta entre las divergencias UV e IR (entendiendo siempre esta última en el límite IR no conmutativo). Además, en las teorías “gauge” ordinarias, gracias a la simetría “gauge” las peores divergencias UV que aparecen de forma efectiva son logarítmicas, y como ya se había encontrado que algunas teorías “gauge” no conmutativas seguían respetando la simetría “gauge” a un “loop” [22], puede resultar natural esperar [165] que en las teorías “gauge” no

conmutativas correspondientes las peores divergencias IR no conmutativas también fueran logarítmicas, dando esperanzas, por tanto, a que fueran teorías bien definidas a todo orden.

Pero ya en la teoría “gauge” no conmutativa sobre $U(1)$ se estropea la correspondencia perfecta entre las divergencias UV e IR [174-176,187,199,203] ya que los diagramas planares tienen el mismo comportamiento UV que la teoría “gauge” ordinaria, es decir logarítmico, pero aparecen nuevos términos no logarítmicos en la acción efectiva a un “loop” en el límite IR no conmutativo. Además si se añaden fermiones, su contribución a un “loop” a la autoenergía del fotón es planar y divergente, por tanto, sin divergencia IR asociada. Lo único que sigue manteniéndose es el hecho de que los coeficientes de los logaritmos de las divergencias UV e IR coinciden en las teorías “gauge” puras [187]. Se ha intentado justificar esta relación desde el punto de vista de teorías de cuerdas (véanse [215] y sus referencias).

En el capítulo tercero de esta parte de la tesis, mostraremos nuestros cálculos explícitos completos que concluyen que la contribución divergente IR en el caso de las teorías “gauge” no conmutativas sobre $U(N)$, con N arbitrario, no es logarítmica, sino de comportamiento cuadrático y lineal, aunque respetando siempre la simetría BRS de la teoría.

Los modelos más prometedores en los que se espera que no aparezcan divergencias IR no conmutativas peores que las logarítmicas son los proporcionados por las teorías supersimétricas en cuyas teorías ordinarias correspondientes se cancelan las divergencias UV no logarítmicas. Cálculos explícitos han mostrado como tampoco aparecen las correspondientes divergencias IR no logarítmicas en la teoría de campos no conmutativa correspondiente a un “loop” [199,200,182,184,202,193,203,204-207], extendiéndose este hecho mediante argumentos rigurosos a todo orden en ciertos modelos [166].

Más aún, en aquellas teorías supersimétricas con función β nula, como la teoría super Yang-Mills $\mathcal{N} = 4$, resulta plausible que además también se cancelen las divergencias logarítmicas, dando lugar por tanto a teorías bien definidas y sin la mezcla anómala entre escalas UV e IR (ver sugerencias y cálculos explícitos en [199,201,193,207]).

Pero, estudios recientes [16] muestran que aunque este tipo de teorías estuvieran bien definidas, presentan problemas de viabilidad desde el punto de vista fenomenológico. Por ejemplo, en QED no conmutativa con $\mathcal{N} = 4$ y ruptura explícita suave (“soft”) de la supersimetría, las relaciones de dispersión incluyen una polarización del fotón con masa, y parece necesario un increíble mecanismo de ajuste entre las masas de los términos de ruptura explícita de la supersimetría para generar un masa suficiente pequeña del fotón compatible con la realidad observada.

Capítulo 2.

Teoría de Yang-Mills sobre el espacio plano no conmutativo.

2.1. Acción y reglas de Feynman

Como ya se mencionó en el capítulo anterior, construiremos la teoría cuántica de campos perturbativa utilizando la acción en términos de campos usuales pero con el producto deformado de Moyal y eligiendo como reglas de Feynman las que se leen directamente de la acción. Los cálculos de esta sección serán covariantes, es decir manteniendo en todo momento $\theta_{\mu\nu}$ como un objeto algebraico sin valor explícito para sus índices, si bien no hay que olvidar que cuando $\theta_{\mu\nu}$ sea “eléctrica” la teoría perturbativa así tratada pierde su carácter unitario.

La teoría de campos $U(N)$ sobre el espacio-tiempo de Minkowski no conmutativo viene dada por la acción de Yang-Mills

$$S_{YM} = -\frac{1}{4g^2 T_R} \int \text{Tr} (F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu})(x), \quad (2.1)$$

donde $F_{\mu\nu}(x)$ es

$$F_{\mu\nu}(x) = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu - i\{A_\mu, A_\nu\}_\star(x), \quad (2.2)$$

donde $\{A_\mu, A_\nu\}_\star(x) = (A_\mu \star A_\nu)(x) - (A_\nu \star A_\mu)(x)$ es el conmutador de Moyal.

El campo de “gauge”, A_μ , es una matriz hermítica $N \times N$, $(A_\mu)^i_j = \sum_{a=0}^{N^2-1} A_\mu^a (T_a)^i_j$. Elegiremos como generadores hermíticos de $U(N)$ a T^a , normalizados de tal forma que $\text{Tr} T_a T_b = T_R \delta_{ab}$, si $a, b \geq 1$, $T_0 = t_R 1_{N \times N}$ con $(t_R)^2 N = T_R$. A_μ^a es una función vectorial real sobre \mathbb{R}^4 .

Esta acción es invariante bajo las transformaciones “gauge” que tienen la siguiente forma infinitesimal: $\delta A_\mu(x) = \partial_\mu \lambda + i\{A_\mu, \lambda\}_\star(x)$.

Nótese que se considera el grupo $U(N)$ y no el grupo $SU(N)$, ya que este último grupo no puede realizarse incluso ni para $N = 2$, al menos con este conmutador de

Moyal y campos elegidos, sobre un espacio no conmutativo plano [216]. Además, si se introdujeran fermiones siempre habría “cuantización de la carga” debida a los términos de autointeracción de la acción. Así para la electrodinámica cuántica no conmutativa las cargas “eléctricas” sólo podrían valer 1, 0 ó -1 [174,175].

El generador funcional de las funciones de Green que da lugar a las reglas de Feynman aludidas en el primer párrafo es

$$Z[J] = N \int \mathcal{D}\phi(x) e^{\frac{i}{\hbar} \left\{ S + \int d^4x J(x)\phi(x) \right\}} \quad (2.3)$$

donde ϕ denota de forma genérica los campos “cuánticos” de la teoría y la integral de camino se define perturbativamente como un desarrollo forma en términos de diagramas de Feynman como siempre.

Como la acción de Yang-Mills elegida es invariante bajo transformaciones “gauge”, su término cinético no tiene inversa y es necesario un proceso de fijación del “gauge”. Lo haremos, como siempre en esta tesis, utilizando el formalismo de BRS. Por tanto, introducimos los campos de “fantasmas” c y \bar{c} , el campo de fijación de “gauge” B y definimos las transformaciones BRS así

$$sA_\mu(x) = D_\mu c(x) = \partial_\mu c(x) + i\{A_\mu, c\}(x), s\bar{c}(x) = b, sb(x) = 0, sc(x) = -(c \star c)(x).$$

Para facilitar la renormalización de los operadores compuestos $sA_\mu(x)$ y $sc(x)$ que aparecen en estas transformaciones, también introducimos como es habitual en el marco de la renormalización algebraica los campos externos $\rho_\mu(x)$ y $\zeta(x)$ que se acoplan a ellos [18].

La acción clásica invariante bajo BRS con una condición de fijación del “gauge” de tipo Lorentz arbitraria es:

$$S_{\text{cl}} = S_{\text{YM}} + S_{\text{gf}} + S_{\text{ext}}, \quad (2.4)$$

donde S_{YM} es la acción de la ec. (2.1) y

$$\begin{aligned} S_{\text{gf}} &= \frac{1}{T_{\text{R}}} \int d^4x \text{Tr} \left[s[\bar{c} \star \left(\frac{\lambda}{2} B + \partial_\mu A^\mu \right)](x), \right. \\ S_{\text{ext}} &= \int d^4x \text{Tr} \left(\rho^\mu \star sA_\mu + \zeta \star sc \right)(x), \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde λ es el parámetro de fijación del “gauge”.

Teniendo en cuenta que

$$\sum_{a=0}^{N^2-1} (T^a)_{i_1}^{j_1} (T^a)_{i_2}^{j_2} = T_{\text{R}} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_1}^{j_2}, \quad (2.6)$$

se obtiene como propagador para la teoría de perturbaciones

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{-ip(x_1-x_2)} \frac{(-i)}{p^2} T_{\text{R}} g^2 \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \left[g^{\mu_1 \mu_2} + (\lambda' - 1) \frac{p^{\mu_1} p^{\mu_2}}{p^2} \right], \quad (2.7)$$

donde $\lambda' \equiv \lambda/g^2$. El resto de propagadores y vértices covariantes que se obtienen directamente de la ec. (2.4) por las técnicas habituales se han representando en las figuras 3 y 4.

Nótese que se dan las reglas de Feynman en la notación de doble índice de 't Hooft [158], que será muy útil para separar la parte planar de los diagramas de la no planar. No se expresan las exponenciales en términos de funciones trigonométricas, ya que todo el cálculo se hará mediante computación simbólica por ordenador, donde resulta más sencillo utilizar propiedades de la exponencial que de las funciones trigonométricas.

Para el caso $U(1)$ ($N = 1$, $T_R = 1$), es decir, la teoría gauge “abeliana” sobre el espacio no conmutativo, las reglas de Feynman correspondientes se obtienen a partir de las de una teoría de Yang-Mills $SU(N)$ no abeliana en un espacio conmutativo si se hace la substitución $c_{a_1 a_2 a_3} \rightarrow 2 \sin \omega(p_2, p_3)$, donde p_2 y p_3 representan respectivamente el momento transportado por las líneas cuyo índice de color son a_2 y a_3 y $c_{a_1 a_2 a_3}$ son las constantes de estructura de la teoría $SU(N)$. Es decir, la teoría $U(1)$ sobre el espacio no conmutativo parece corresponder con una teoría $SU(N)$ sobre el espacio conmutativo al menos en el nivel árbol, si bien, no tiene constantes de estructura correspondientes a un grupo de Lie. Más aún, los diagramas de Feynman de nuestra teoría $U(1)$ cuyos correspondientes en la teoría $SU(N)$ conmutativa son finitos, resultarán ser también finitos.

Para una expresión de las reglas de Feynman de la teoría $U(N)$ en espacio no conmutativo en notación trigonométrica véanse las referencias [168,163].

Las manipulaciones formales habituales de la integral de camino conducirían a la identidad de Slavnov-Taylor para el funcional 1PI $\Gamma[A_\mu, B, c, \bar{c}; \rho_\mu, \zeta]$:

$$\mathcal{S}(\Gamma) \equiv \int d^4x \text{Tr} \left[\frac{\delta \Gamma}{\delta \rho^\mu} \frac{\delta \Gamma}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \Gamma}{\delta \zeta} \frac{\delta \Gamma}{\delta c} + B \frac{\delta \Gamma}{\delta \bar{c}} \right] = 0. \quad (2.8)$$

identidad que se satisface trivialmente en el nivel árbol.

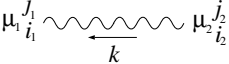
Esta identidad gobierna la simetría BRS de la teoría a nivel cuántico en las teorías “gauge” habituales.

Como los diagramas de Feynman formales que contribuyen a $\Gamma[A_\mu, B, c, \bar{c}; \rho_\mu, \zeta]$ tiene divergencias ultravioleta no está claro que el funcional 1PI renormalizado, si se puede construir, satisfaga las identidades de Slavnov-Taylor: es decir, podrían aparecer anomalías. Uno de los resultados centrales de nuestro trabajo es que a 1 loop y tanto para $U(N)$ como $U(1)$ el funcional 1PI renormalizado por substracción mínima en regularización dimensional existe y satisface directamente las identidades de Slavnov-Taylor.

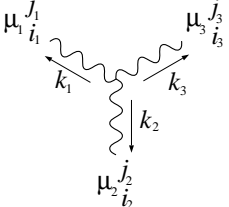
Este resultado no es evidente a priori. De hecho, es de interés porque proporciona un ejemplo de teoría con término clásico de interacción no polinómico en los campos y sus derivadas que es preservado por la deformación cuántica. O visto de otra forma, se ha encontrado una deformación de la teoría Yang-Mills usual que mantiene la invariancia “gauge” al menos a 1 “loop”.

Para el caso de 1 “loop” (2.8) se reduce a

$$b \Gamma_1 = 0, \quad (2.9)$$



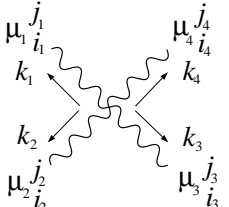
$$G_{AA}^{(0) \mu_1 \mu_2 j_1 j_2}(k) = T_R g^2 \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \frac{(-i)}{k^2} \left[g^{\mu_1 \mu_2} + (\lambda' - 1) \frac{k^{\mu_1} k^{\mu_2}}{k^2} \right]$$



$$i S_{AAA}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 j_1 j_2 j_3}(k_1, k_2, k_3 = -k_1 - k_2) =$$

$$\frac{i}{g^2 T_R} \left[\delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} e^{i\omega(k_1, k_2)} - \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} e^{-i\omega(k_1, k_2)} \right]$$

$$[g^{\mu_1 \mu_2} (k_1 - k_2)^{\mu_3} + g^{\mu_2 \mu_3} (k_2 - k_3)^{\mu_1} + g^{\mu_3 \mu_1} (k_3 - k_1)^{\mu_2}]$$

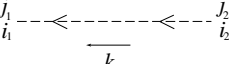


$$i S_{AAAA}^{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4 j_1 j_2 j_3 j_4}(k_1, k_2, k_3, k_4 = -k_1 - k_2 - k_3) =$$

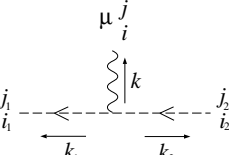
$$\frac{i}{g^2 T_R} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} e^{i[\omega(k_1, k_2) + \omega(k_3, k_4)]}$$

$$(2g^{\mu_1 \mu_3} g^{\mu_2 \mu_4} - g^{\mu_1 \mu_4} g^{\mu_2 \mu_3} - g^{\mu_1 \mu_2} g^{\mu_3 \mu_4})$$

$$+ (1\ 2\ 4\ 3) + (1\ 3\ 2\ 4) + (1\ 3\ 4\ 2) + (1\ 4\ 2\ 3) + (1\ 4\ 3\ 2)$$



$$G_{c\bar{c}}^{(0) j_1 j_2}(k) = T_R \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \frac{i}{k^2}$$



$$i S_{c\bar{c}A}^{j_2 j_1 i} j^\mu(k_2, k_1, k) =$$

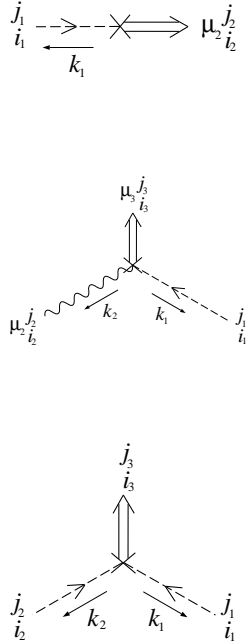
$$\frac{i k_1^\mu}{T_R} \left[e^{-i\omega(k_1, k_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^j \delta_i^{j_1} - e^{i\omega(k_1, k_2)} \delta_{i_1}^j \delta_{i_2}^{j_1} \delta_i^{j_2} \right]$$

Figura 3: Reglas de Feynman para la teoría de Yang-Mills $U(N)$ sobre el espacio no conmutativo: Propagadores y vértices sin campos externos. $(i\ j\ k\ l)$ denota una permutación de $(1\ 2\ 3\ 4)$.

donde

$$b \equiv \mathcal{S}_{cl} = \int d^4x \text{Tr} \left[\frac{\delta \mathcal{S}_{cl}}{\delta \rho^\mu} \frac{\delta}{\delta A_\mu} + \frac{\delta \mathcal{S}_{cl}}{\delta A^\mu} \frac{\delta}{\delta \rho_\mu} + \frac{\delta \mathcal{S}_{cl}}{\delta \zeta} \frac{\delta}{\delta c} + \frac{\delta \mathcal{S}_{cl}}{\delta c} \frac{\delta}{\delta \zeta} + B \frac{\delta}{\delta \bar{c}} \right] \quad (2.10)$$

es el operador lineal de Slavnov-Taylor.



$$S_{c; sA}^{(0) j_1 j_2}_{i_1 i_2 \mu_2}(k_1) = i k_1 \mu_2 \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1}$$

$$S_{cA; sA}^{(0) j_1 j_2 j_3}_{i_1 i_2 \mu_2 i_3 \mu_3}(k_1, k_2, k_3) =$$

$$-i \left[\delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} e^{-i\omega(k_1, k_2)} - \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} e^{i\omega(k_1, k_2)} \right] g_{\mu_2 \mu_3}$$

$$S_{cc; sc}^{(0) j_1 j_2 j_3}_{i_1 i_2 i_3}(k_1, k_2, k_3) =$$

$$i \left[\delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} e^{-i\omega(k_1, k_2)} - \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} e^{i\omega(k_1, k_2)} \right]$$

Figura 4: Reglas de Feynman para la teoría de Yang-Mills $U(N)$ sobre el espacio no conmutativo: Vértices con inserciones de las variaciones BRS.

2.2. La divergencia ultravioleta a un “loop”

Como se explicó en el capítulo anterior, si se dividen las reglas de Feynman en cada uno de sus sumandos cíclicos, entonces sólo los diagramas planares pueden tener divergencias en el ultravioleta, y las únicas funciones 1PI divergentes serán Γ_{AA} , Γ_{AAA} , Γ_{AAAA} , $\Gamma_{\bar{c}c}$, $\Gamma_{\bar{c}Ac}$, Γ_{Jc} , Γ_{JAc} y Γ_{Hcc} .

Como siempre en esta tesis, se ha empleado regularización dimensional para regularizar las integrales de Feynman. La regularización dimensional de un diagrama se define así: en primer lugar, expresamos todos los factores trigonométricos, de haberlos, en términos de funciones exponenciales; en segundo lugar la medida cuatridimensional pasa a ser $\frac{d^d p}{(2\pi)^4}$ y cualquier expresión algebraica habitual tiene su objeto correspondiente en “ d ” dimensiones según las reglas de la ref. [12]; en tercer lugar, la integración gaussiana sobre los momentos en d dimensiones se realiza en la forma usual mediante la introducción de parámetros de Schwinger, lo que acaba conduciendo a integrales sobre el espacio de parámetros de Schwinger:

$$\frac{1}{(p_i^2)^m} = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^\infty d\alpha_i \alpha_i^{m-1} e^{-\alpha_i p_i^2}; \quad (2.11)$$

y en esta expresión final d pasa a ser una variable compleja con los objetos formales satisfaciendo las reglas algebraicas de la ref. [12]. Lo único nuevo es la matriz antisimétrica $\theta^{\mu\nu}$, es decir, $\theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}$, que aparece dentro de las combinaciones $\omega(p, q) \equiv -\frac{1}{2}\theta^{\mu\nu}p_\mu q_\nu$, que puede suponerse de rango cuatro y con la propiedad $-\tilde{p}_\mu \tilde{p}^\mu = p_\mu \theta^{\mu\rho} g_{\rho\sigma} \theta^{\sigma\nu} p_\nu > 0$

si $p \neq 0$. Estas propiedades son sólo compatibles con espacios de dimensión par, por tanto, y para evitar posibles inconsistencias, introducimos el objeto algebraico $\theta^{\mu\nu}$ en “ d dimensiones” como si fuera “intrínsecamente de 4 dimensiones” es decir, teniendo las siguientes propiedades:

$$\theta^{\mu\nu} \hat{g}_{\nu\rho} = 0, \quad \theta^{\mu\nu} = -\theta^{\nu\mu}, \quad \theta^{\mu\rho} \bar{g}_{\rho\sigma} \theta^{\sigma\nu} \bar{p}_\mu \bar{p}_\nu > 0 \text{ si } \bar{p}_\mu \neq 0, \quad \bar{p}_\mu \equiv \bar{g}_{\mu\nu} p^\nu. \quad (2.12)$$

Como veremos en los cálculos a un loop, las divergencias no se van a mezclar con la posible diferencia entre distintas regularizaciones de $\theta^{\mu\nu}$, por lo que, a los efectos, esta última apreciación será irrelevante, en contraposición al caso de γ_5 estudiado en los primeros capítulos.

En [22] presentamos el primer cálculo realizado de la contribución divergente en el ultravioleta completa a un “loop” de todas las funciones de Green 1PI divergentes de una teoría “gauge” sobre el espacio no conmutativo, en concreto para la teoría $U(1)$. Y en [21] generalizamos el cálculo, también por vez primera de forma completa para el caso genérico de $U(N)$, si bien en [168] se había presentado previamente la divergencia de las funciones 1PI de 2 y 3 bosones y en [163] la de 4 bosones de forma independiente. Los resultados comunes coinciden.

El cálculo es directo utilizando las reglas de Feynman de las figuras 3 y 4 así como los resultados conocidos para las integrales divergentes habituales que aparecen en cálculos de teorías a un “loop” sin masa. Nótese que a diferencia de [168] no distinguimos entre bosones de la parte $U(1)$ y de la parte $SU(N)$. Así las reglas de Feynman son mucho más sencillas y el cálculo simbólico puede realizarse de forma automática mediante un programa más sencillo. Además siempre trabajamos con las reglas de Feynman totalmente simetrizadas y su representación en forma de vértices y propagadores de líneas simples (es decir, no dobles). Se distingue fácilmente las partes planares de las no planares por la dependencia en el momento interno del factor de fase o por los factores de color de cada sumando.

En el límite $\theta^{\mu\nu} \rightarrow 0$, la acción clásica tiende a una teoría ordinaria con simetría “gauge” $U(N)$. Pero dadas las características novedosas, no resulta trivial deducir el comportamiento de la teoría no conmutativa a nivel cuántico a partir de su contrapartida ordinaria, en especial, si se sigue conservando la unicidad de la constante de acoplamiento o, lo que es lo mismo, la invariancia bajo las transformaciones BRS no conmutativas dadas por (2.3). Por tanto, resultan necesarios cálculos explícitos como los que presentamos aquí.

En el apéndice D damos el resultado diagrama por diagrama de la parte divergente, obteniéndose en total y siempre a un “loop”:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\mu_1 \mu_2}^{(AA), (polo) j_1 j_2}(p) &= \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{10}{3} - (\lambda' - 1) \right) N \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \left(p^2 g_{\mu_1 \mu_2} - p_{\mu_1} p_{\mu_2} \right) \\ \Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{(AAA), (polo) j_1 j_2 j_3}(p_1, p_2, p_3) &= \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{2} (\lambda' - 1) \right) \\ &\quad N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((p_1 - p_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (p_2 - p_3)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (p_3 - p_1)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} \right) \\
\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{(AAAA), (polo)} & \stackrel{j_1 j_2 j_3 j_4}{i_1 i_2 i_3 i_4} (p_1, p_2, p_3, p_4) = \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{2}{3} + 2(\lambda' - 1) \right) \\
& N \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_3, p_4)]} \\
& (2g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} - g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4}) + \\
& (1243) + (1324) + (1342) + (1423) + (1432) \\
\Gamma^{(c\bar{c})} & \stackrel{j_2 j_1}{i_2 i_1} (p_1) = - \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 \left(1 - \frac{\lambda' - 1}{2} \right) N \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} p_1^2 \\
\Gamma^{(c\bar{c}A)} & \stackrel{j_2 j_1}{i_2 i_1} \stackrel{j_3}{i_3} \mu (p_2, p_1, p_3) = \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 (1 + (\lambda' - 1)) \\
& N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] p_{1\mu} \\
\Gamma^{(c\rho)} & \stackrel{j_1 j_2}{i_1 i_2} \mu_2 (p_1) = -i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 T_R \left(1 - \frac{\lambda' - 1}{2} \right) \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} p_{1\mu_2} \\
\Gamma^{(cA\rho)} & \stackrel{j_1 j_2}{i_1 i_2} \mu_2 \stackrel{j_3}{i_3} \mu_3 (p_1, p_2, p_3) = -i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 T_R (1 + (\lambda' - 1)) \\
& N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] g_{\mu_2 \mu_3} \\
\Gamma^{(cc\zeta)} & \stackrel{j_1 j_2 j_3}{i_1 i_2 i_3} (p_1, p_2, p_3) = i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 T_R (1 + (\lambda' - 1)) \\
& N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right], \quad (2.13)
\end{aligned}$$

donde $d = 4 - \varepsilon$ y $(ijkl)$ representa la correspondiente permutación de los índices

Este resultado para $U(N)$, que es el de nuestra publicación [21], coincide con el de nuestra publicación [22] sin más que particularizando al caso de $U(1)$, es decir, $N = T_R = 1$:

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu_1 \mu_2}^{(AA)}(p) &= - \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{13}{3} - \lambda' \right) (p_{\mu_1} p_{\mu_2} - p^2 g_{\mu_1 \mu_2}) \\
\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3}^{(AAA)}(p_1, p_2, p_3) &= -i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{17}{3} - 3\lambda' \right) \sin[\omega(p_2, p_3)] \\
& \left((p_1 - p_3)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} + (p_2 - p_1)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (p_3 - p_2)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} \right) \\
\Gamma_{\mu_1 \mu_2 \mu_3 \mu_4}^{(AAAA)}(p_1, p_2, p_3, p_4) &= \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{4}{3} - 2\lambda' \right) \\
& 4 \left[\sin[\omega(p_1, p_2)] \sin[\omega(p_3, p_4)] (g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}) + \right. \\
& \sin[\omega(p_1, p_4)] \sin[\omega(p_3, p_2)] (g_{\mu_2 \mu_4} g_{\mu_1 \mu_3} - g_{\mu_4 \mu_3} g_{\mu_1 \mu_2}) + \\
& \left. \sin[\omega(p_4, p_2)] \sin[\omega(p_3, p_1)] (g_{\mu_4 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_1} - g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3}) \right] \\
\Gamma^{(c\bar{c})}(p) &= - \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{1}{2} \right) (3 - \lambda') g^2 p^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\mu}^{(c\bar{c}A)}(p_2, p_1, p_3) &= -i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) (\lambda' g^2) (p_1)_{\mu} 2 \sin[\omega(p_1, p_2)] \\
\Gamma_{\mu}^{(c\rho)}(p) &= \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{3-\alpha}{2} \right) g^2 p_{\mu} \\
\Gamma_{\mu_1 \mu_2}^{(cA\rho)}(p_1, p_2, p_3) &= \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) (\lambda' g^2) g_{\mu_1 \mu_2} 2 \sin[\omega(p_1, p_2)] \\
\Gamma^{(cc\zeta)}(p_1, p_2, p_3) &= \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) (\lambda' g^2) \sin[\omega(p_1, p_2)], \tag{2.14}
\end{aligned}$$

Nótese que la estructura en momentos de la contribución singular calculada tiene la misma forma que los términos de S_{cl} , de tal forma que parece plausible que estas contribuciones puedan ser substraídas mínimamente por renormalización multiplicativa de los campos y parámetros de la acción invariante bajo las transformaciones BRS. Para ello las contribuciones divergentes a las diferentes funciones 1PI han de tener los coeficientes relativos adecuados. Y así resulta ser con:

$$\begin{aligned}
g_0 &= \mu^{2\varepsilon} Z_g g, \quad \lambda_0 = Z_{\lambda} \lambda, \quad A_{0\mu} = Z_A A_{\mu}, \quad B_0 = Z_B B, \\
\rho_{0\mu} &= Z_{\rho} \rho_{\mu}, \quad \zeta_0 = Z_{\zeta} \zeta, \quad c_0 = Z_c c \quad \text{y} \quad \bar{c}_0 = Z_{\bar{c}} \bar{c}, \tag{2.15}
\end{aligned}$$

y

$$Z_g = 1 - \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} 2N \frac{11}{6} g^2 T_{\text{R}}, \quad Z_A = 1 - \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} 2N \left[1 + \frac{1}{4} (\lambda' - 1) \right] g^2 T_{\text{R}}. \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}
Z_{\bar{c}} Z_c &= 1 + \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \frac{3-\lambda'}{2} g^2 T_{\text{R}} N, \quad Z_{\bar{c}} Z_A Z_c = 1 - \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \lambda' g^2 T_{\text{R}} N, \\
Z_{\zeta} Z_c^2 &= 1 - \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \lambda' g^2 T_{\text{R}} N, \quad Z_B = Z_A^{-1}, \quad Z_{\lambda} = Z_A^2 \quad \text{y} \quad Z_{\rho} = Z_{\bar{c}}. \tag{2.17}
\end{aligned}$$

Nótese que, a priori, esto es sorprendente, porque aunque las divergencias presenten la misma forma que la teoría en el caso del espacio conmutativo y el factor de fase se respete por el análisis de Filk [160], algunos sumandos de los integrandos, los no planares, pasan a ser de forma discontinua convergentes, alterándose por tanto el coeficiente numérico global de la divergencia de cada diagrama al pasar del caso del espacio conmutativo al no conmutativo.

Por supuesto, el hecho de que se mantenga la renormalización multiplicativa en el caso no conmutativo, es consecuencia de que la teoría regularizada dimensionalmente es invariante bajo BRS. Es decir, como en el caso de las teorías vectoriales de Yang-Mills en el espacio conmutativo, el hecho de que las constantes de renormalización “infinitas” o singulares Z conviertan en funciones finitas en el ultravioleta a las funciones 1PI cuya contribución singular viene dada por la ec. (2.13), es consecuencia de que la contribución

singular de $\Gamma^{(\text{polo})}$, al funcional 1PI dimensionalmente regularizado puede reescribirse en la forma

$$\Gamma^{(\text{polo})} = \frac{a}{4g^2 T_R} \int d^d x \text{Tr} (F_{\mu\nu} \star F^{\mu\nu})(x) + b_d X, \quad (2.18)$$

donde a un “loop” hemos obtenido

$$X = \int d^d x \text{Tr} \left(a_1 (\rho_\mu + \partial_\mu \bar{c}) \star A_\mu - a_2 \zeta \star c \right)(x),$$

$$a = \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \frac{22}{3} N T_R g^2, \quad a_1 = + \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \frac{3 + \lambda'}{2} N T_R g^2, \quad a_2 = + \frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \lambda' N T_R g^2,$$

y b_d es el correspondiente operador lineal de Slavnov-Taylor en “ d dimensiones”.

La ec. (2.18) tiene una forma explícitamente invariante bajo BRS y como en el caso conmutativo tiene dos partes, el término de Yang-Mills es cerrado bajo b_d mientras que el segundo término es exacto bajo b_d ($b_d^2 = 0$). Más aún, se tiene las mismas relaciones que en la teoría Yang-Mills sobre el espacio tiempo conmutativo:

$$Z_g = 1 - \frac{a}{2}, \quad Z_A = 1 + a_1, \quad Z_{\bar{c}} Z_c = 1 - a_1 + a_2, \quad Z_{\bar{c}} Z_A Z_c = 1 + a_2,$$

$$Z_\zeta Z_c^2 = 1 + a_2, \quad Z_B = Z_A^{-1}, \quad Z_\lambda = Z_A^2 \quad \text{y} \quad Z_\rho = Z_{\bar{c}}. \quad (2.19)$$

y los valores de las constantes multiplicativas son las mismas que las del caso conmutativo pese a que ahora sólo una parte de la integral es divergente.

Definiremos el funcional 1PI renormalizado por substracción mínima (MS) a orden \hbar , $\Gamma_{\text{ren}}^{(1), \text{MS}}$, como siempre:

$$\Gamma_{\text{ren}}^{(1), \text{MS}} = \text{LIM}_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\Gamma_{\text{DReg}}^{(1)} - \Gamma^{(\text{polo})} \right], \quad (2.20)$$

donde $\Gamma_{\text{DReg}}^{(1)}$ denota el funcional 1PI dimensionalmente regularizado a orden \hbar y $\Gamma^{(\text{polo})}$ viene dado por la ec. (2.13). El límite $\varepsilon \rightarrow 0$ se toma tras haber substraído el polo. Se sobreentiende que además todos los objetos covariantes algebraicos de “ d dimensiones” se reemplazan por sus equivalentes en 4 dimensiones [12]; esta operación es la que hemos denominado por LIM. Como $\Gamma_{\text{DReg}}^{(1)}$ es invariante bajo las transformaciones BRS, es decir, satisface la identidad de Slavnov-Taylor a orden \hbar

$$b_d \Gamma_{\text{DReg}}^{(1)} = 0, \quad (2.21)$$

el funcional 1PI renormalizado $\Gamma_{\text{ren}}^{(1), \text{MS}}$ también es invariante bajo las transformaciones BRS:

$$\mathcal{B} \Gamma_{\text{ren}}^{(1), \text{MS}} = 0. \quad (2.22)$$

Por tanto se concluye que la identidad de Slavnov-Taylor (ec. (2.8)) es válida al orden \hbar . Esta afirmación no es rigurosa a todo orden pues no existe ninguna prueba de un principio de acción cuántica para la teoría regularizada dimensionalmente, que incluya el tipo de interacciones como el de aquí. La estructura de la regularización dimensional hace pensar que la teoría regularizada dimensionalmente es invariante bajo BRS.

Como se ha obtenido una renormalización multiplicativa, podemos utilizar las técnicas habituales de los libros de texto para obtener la ecuación del grupo de renormalización para $\Gamma_{\text{ren}}^{\text{MS}}$:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} - \beta \frac{\partial}{\partial g} - \delta_\alpha \frac{\partial}{\partial \alpha} - \sum_\phi \gamma_\phi \int d^4x \phi(x) \frac{\delta}{\delta \phi(x)} \right] \Gamma_{\text{ren}}^{\text{MS}}[\phi; g, \theta^{\mu\nu}, \alpha] = 0, \quad (2.23)$$

donde los campos se han denotado por ϕ . Nótese que tenemos un parámetro dimensional, $\theta^{\mu\nu}$, que es una variable del grupo de renormalización a través del funcional generador de las funciones 1PI. Con la expresión calculada de la divergencia a un “loop”, se obtiene como función beta a un “loop” de la teoría

$$\beta(g^2) \equiv \mu \frac{dg^2}{d\mu} = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{22}{3} N T_R g^4. \quad (2.24)$$

y

$$\begin{aligned} \gamma_A &= +\frac{1}{8\pi^2} \left(\frac{3 + \lambda'}{2} \right) N T_R g^2, & \gamma_c &= +\frac{1}{8\pi^2} \lambda' N T_R g^2, \\ \gamma_\rho &= \gamma_{\bar{c}} = \gamma_B = -\gamma_A, & \delta_\lambda &= -2 \gamma_A \lambda, & \gamma_\zeta &= -\gamma_c. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Hay que resaltar que incluso para el caso $U(1)$ la teoría es asintóticamente libre, al igual que las teorías Yang-Mills puras no abelianas sobre el espacio-tiempo usual conmutativo.

De igual forma, debido a que

$$\frac{\delta \Gamma^{(\text{polo})}}{\delta B} = 0, \quad \frac{\delta \Gamma^{(\text{polo})}}{\delta \bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta \Gamma^{(\text{polo})}}{\delta \rho_\mu} = 0. \quad (2.26)$$

se establece que a 1 “loop” se satisfacen las ecuaciones de fijación del “gauge” y la de los fantasmas:

$$\begin{aligned} T_R \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}^{\text{MS}}}{\delta B} &= \lambda B + \partial A + O(\hbar^2), \\ \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}^{\text{MS}}}{\delta \bar{c}} + \partial_\mu \frac{\delta \Gamma_{\text{ren}}^{\text{MS}}}{\delta \rho_\mu} &= 0 + O(\hbar^2). \end{aligned} \quad (2.27)$$

Nótese por último y como esperábamos que no es necesaria ninguna renormalización de la matriz $\theta_{\mu\nu}$, al mantenerse siempre dentro del ámbito de argumentos de exponenciales actuando sobre momentos externos en integrales divergentes o internos en integrales finitas.

2.3. La divergencia infrarroja no conmutativa

En la ref. [165], utilizando la correspondencia UV/IR descubierta en ese mismo artículo, se conjeturaba que el nuevo tipo de comportamiento divergente que aparece cuando ciertas combinaciones de momentos externos de los diagramas o, equivalentemente, la matriz de no-conmutatividad $\theta_{\mu\nu}$, tienden a 0 en la teoría “gauge” $U(N)$ no conmutativa sólo fuera de tipo logarítmico ya que las correspondientes divergencias en el ultravioleta de la teoría lo son por la invariancia “gauge”.

Pero en las refs. [175,198,199,187,203] se demostró mediante cálculos explícitos cómo en el caso de teorías “gauge” no conmutativas sobre el grupo $U(1)$ aparecen divergencias IR no conmutativas peores que las logarítmicas. Diremos divergencias IR no conmutativas para diferenciar de las divergencias infrarrojas habituales que aparecen en las teorías de campos locales sin masa (por ejemplo, cuando los momentos externos de una función de Green con propagadores sin masa se restringen a la capa de masas en su contribución a la matriz de colisión).

Dentro de ese contexto, calculamos las contribuciones divergentes IR en el caso más general de una teoría “gauge” $U(N)$ pura no conmutativa en el orden más importante cuando los momentos externos o la matriz $\theta_{\mu\nu}$ tienden a 0 en el “gauge” de Feynman, suponiendo siempre una matriz $\theta_{\mu\nu}$ de tipo “magnético” (Así, siempre $p \circ p \equiv -\tilde{p}^2 > 0$ para p real). Contribuyen todos los diagramas del apéndice *D* y el diagrama de tipo “renacuajo” (“tadpole” en inglés) de la figura 5. Las integrales básicas necesarias para el cálculo en el orden realizado aquí se exponen en el apéndice *E*. Nótese que la substracción mínima de la regularización dimensional de estos diagramas, necesaria para cancelar las divergencias UV de las integrales, no afecta a la divergencia IR no conmutativa.

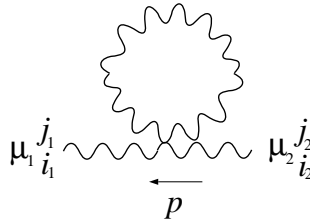


Figura 5: Diagrama “renacuajo” con 2 bosones de “gauge” externos.

En la teoría “gauge” $U(N)$ ordinaria, si la regularización preserva la simetría “gauge”, las divergencias ultravioletas de la suma de los diagramas de la autoenergía son de tipo logarítmico, ya que la expresión cuadrática invariante “gauge” $g^{\mu\nu} - p^\mu p^\nu / p^2$ factoriza fuera de la integral.

Pero en la teoría no conmutativa, en general, los diagramas de autoenergía implicarán

integrales con divergencias cuadráticas en el momento externo p , siendo la integral básica

$$\int d^4k \frac{e^{i\tilde{p}k}}{k^2 + i0} = \frac{-4i\pi^2}{p \circ p} . \quad (2.28)$$

La integral correspondiente al diagrama de tipo “renacuajo” no es divergente en regularización dimensional en el caso de la teoría “gauge” ordinaria sino que incluso es nula, ya que estamos en el caso de una teoría sin masa. En cambio en el caso no conmutativo tiene una contribución no planar que es finita y además divergente cuando los momentos externos tienden a cero:

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} 6 \frac{g^{\mu_1 \mu_2}}{\tilde{p}^2} . \quad (2.29)$$

Nótese que, efectivamente la divergencia es cuadrática cuando \tilde{p} tiende a 0. Esta contribución, que no es invariante “gauge”, se ve cancelada de forma completa por la parte no invariante “gauge” de la divergencia cuadrática de los diagramas denominados en el apéndice D “con 2 bosones de gauge”. Los resultados de cada uno de los diagramas se da en el apéndice D, y su suma es:

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \left(-6 \frac{g^{\mu_1 \mu_2}}{\tilde{p}^2} + 8 \frac{\tilde{p}^{\mu_1} p^{\mu_2}}{\tilde{p}^4} \right) . \quad (2.30)$$

Por tanto, la contribución total para la autoenergía de los bosones, teniendo en cuenta el diagrama “renacuajo” es:

$$\frac{i}{(4\pi)^2} \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} 8 \frac{\tilde{p}^{\mu_1} p^{\mu_2}}{\tilde{p}^4} . \quad (2.31)$$

Para la corrección al vértice de tres bosones, nuevamente, en el caso de la teoría “gauge” ordinaria, la simetría rotacional implica que las integrales del tipo

$$\int d^4k \frac{k^{\mu_1} k^{\mu_2} k^{\mu_3}}{k^6} \quad (2.32) ,$$

no conducen a las divergencias lineales esperadas por análisis dimensional. Pero en el caso de la teoría no conmutativa, las fases oscilantes de las partes no planares no respetan la mencionada simetría rotacional y las integrales correspondientes serán finitas pero con una posible divergencia IR en los momentos externos del tipo

$$\frac{\tilde{p}^{\mu_1} \tilde{p}^{\mu_2} \tilde{p}^{\mu_3}}{\tilde{p}^4} . \quad (2.33)$$

Analizando los resultados de los diagramas de las figuras “con 3 bosones” del apéndice D se observan dos tipos de estructuras. Realizando las sumas sobre esos diagramas y todas

sus permutaciones una de esas estructuras, la que no es invariante “gauge” nuevamente se cancela, obteniéndose en total:

$$\frac{-16}{(4\pi)^2} \left\{ \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_2} \frac{\tilde{p}_1^{\mu_1} \tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_1^{\mu_3}}{\tilde{p}_1^4} + \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i_3}^{j_1} \frac{\tilde{p}_2^{\mu_1} \tilde{p}_2^{\mu_2} \tilde{p}_2^{\mu_3}}{\tilde{p}_2^4} + \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_3} \frac{\tilde{p}_3^{\mu_1} \tilde{p}_3^{\mu_2} \tilde{p}_3^{\mu_3}}{\tilde{p}_3^4} \right\} \quad (2.34)$$

Por análisis dimensional, en el caso de las correcciones al vértice de cuatro bosones y de los diagramas con campos fantasma y externos, sólo pueden aparecer divergencias logarítmicas, y no contribuyen al orden calculado aquí.

Por tanto, la suma total de la contribución no logarítmica de todos los diagramas que hemos obtenido a la acción efectiva es:

$$\begin{aligned} \Gamma_{\text{Ren}}^{(1)} = & \frac{8}{(4\pi)^2} \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \text{Tr}(\tilde{\partial}_\mu A^\mu) \frac{1}{\tilde{\Box}^2} \text{Tr}(\tilde{\partial}_\nu A^\nu) - \text{Tr} \left(\frac{\tilde{\partial}_{\mu_1} \tilde{\partial}_{\mu_2} \tilde{\partial}_{\mu_3}}{\tilde{\Box}^2} A^{\mu_1} \right) \text{Tr}(A^{\mu_2} A^{\mu_3}) \right\} \\ & - \frac{1}{(4\pi)^2} \int d^4x \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr} \left(\frac{\tilde{\partial}_\mu}{\tilde{\Box}} A^\mu \right) \text{Tr}(A_\nu A^\nu) + 2 \text{Tr} \left(\frac{\tilde{\partial}_\mu}{\tilde{\Box}} A^\nu \right) \text{Tr}(A^\mu A_\nu) \right\} \\ & + O(\log \theta) \end{aligned} \quad (2.35)$$

Es decir, no es nula, pero sí es la suma de dos términos (los correspondientes a cada integral) tales que su variación “gauge” no conmutativa en el límite de $\theta \rightarrow 0$ es nula. Es decir, es una contribución invariante bajo la simetría BRS, como era de esperar, ya que la regularización dimensional preserva esta simetría incluso en el caso no conmutativo.

Por último, nótese que las contribuciones no planares (2.35) necesitan siempre la presencia de la parte $U(1)$ en los cálculos de los diagramas, ya que $\text{Tr} A^\mu = 0$ si A^μ no tiene componente sobre $U(1)$.

RESULTADOS Y CONCLUSIONES

RESULTADOS

- i)* Empleando resultados teóricos previos poco utilizados en la literatura científica, hemos desarrollado de forma explícita una técnica sistemática para obtener resultados renormalizados compatibles con la simetría BRS en regularización dimensional de modelos quirales con cancelación de anomalías, empleando siempre de forma consistente una matriz de Dirac γ_5 no anticonmutante.
- ii)* Se han realizado cálculos mediante dicha técnica de forma explícita y a un “loop” en dos modelos de teorías “gauge” quirales. Siempre se ha tenido en cuenta la generalidad adecuada para su extensión a cálculos de órdenes superiores.
- iii)* Se han obtenido las ecuaciones del grupo de renormalización en un modelo quiral donde las técnicas habituales basadas en la renormalización multiplicativa no son suficientes por utilizar un regulador que no preserva la invariancia “gauge” quiral del modelo.
- iv)* Se ha comprobado mediante un cálculo explícito en el orden de un “loop” que el hecho de que la regularización dimensional preserve la simetría “gauge” en las teorías vectoriales regularizadas es esencial para mantener la renormalizabilidad de las divergencias ultravioletas en el espacio no conmutativo de la teoría “gauge” pura con grupos $U(1)$ y $U(N)$.
- v)* De igual forma, se ha comprobado, nuevamente mediante cálculos en el orden de un “loop”, que dichas teorías presentan divergencias infrarrojas cuadráticas y lineales en los momentos, lo que corrobora lo conocido previamente para $U(1)$. Este hecho pone en entredicho la renormalizabilidad en orden arbitrario de “loops” de estas teorías.

CONCLUSIONES

- a)* La renormalización dimensional rigurosa en teorías quirales “gauge”, utilizando una matriz γ_5 no anticonmutante, es posible desde el punto de vista práctico.
- b)* Al menos a un “loop”, la deformación no conmutativa del producto en una teoría de Yang-Mills es consistente con la idea habitual de renormalizabilidad en el ultravioleta y con la invariancia BRS.
- c)* Es de esperar problemas en órdenes mayores de la teoría de perturbaciones de los modelos de Yang-Mills no conmutativos por la presencia de las divergencias infrarrojas no conmutativas.

CUESTIONES PENDIENTES

- * Los resultados *i)* y *ii)* constituyen una motivación suficiente para emprender los mismos cálculos a dos “loops” en un modelo sencillo, como el abeliano quirral de Higgs-Kibble, a modo de paso previo del cálculo de la acción regularizada modificada del *Modelo estándar* necesaria para que su substracción mínima en regularización dimensional proporcione resultados renormalizados invariantes bajo la simetría BRS en el orden de dos “loops” del desarrollo perturbativo. Dicha acción modificada podría ser de vital importancia para discriminar casos de nueva física de cálculos teóricos incorrectos.

En esta tesis se ha presentado de forma sistemática los pasos necesarios que habría que realizar para realizar dichos cálculos en el orden de dos “loops”. Los resultados de estos cálculos serán el objetivo de nuestras publicaciones siguientes.

- * También queda pendiente el estudio de cómo controlar la influencia de la elección de los contratérminos finitos invariantes en los resultados numéricos finales, orden a orden, con vistas a predicciones fenomenológicas.
- * Hemos calculado la divergencia ultravioleta de la teoría Yang-Mills no conmutativa $U(N)$ en un “gauge” de Lorentz arbitrario, mientras que su divergencia infrarroja no conmutativa sólo la hemos calculado en el “gauge” de Feynman. Además hemos despreciado las contribuciones logarítmica en este último caso. Una extensión obvia e interesante de nuestro trabajo sería, calcular la divergencia infrarroja no conmutativa en el caso más general de “gauge” de Lorentz arbitrario incluyendo las contribuciones logarítmicas.
- * Durante esta tesis, hemos mencionado que el problema planteado por *v)* parece resolverse con la correspondiente teoría supersimétrica, pero entonces la regularización dimensional es un método de regularización que no preserva la supersimetría, al igual que tampoco preserva la simetría BRS en las teorías quirales, si bien la teoría cuántica ha de satisfacer una serie de identidades relacionadas con la supersimetría. Una posibilidad interesante de investigación consistiría en estudiar si es posible extender algunas de las técnicas utilizadas para las teorías quirales de la primera parte de la tesis al caso de las teorías supersimétricas sobre el espacio no conmutativo.

Apéndice A.

STI con término de ruptura en reg. dimensional

En este apéndice se deduce la ec. (2.18) haciendo uso exclusivo de los *principios de acción regularizada*, enunciados en las ecs. (2.11), (2.12), y y que son rigurosos dentro del marco de la regularización dimensional.

Sea $S_{\text{DReg},n}$ una acción regularizada dimensionalmente dada por

$$S_{0,\text{libre}}[\varphi, \Phi] + S_{\text{int},n}[\varphi, \Phi; K_\Phi], \quad (\text{A.1})$$

con $S_{\text{int},n}[\varphi, \Phi; K_\Phi] = S_{0,\text{int}}[\varphi, \Phi] + \int d^d x K_\Phi(x) s_d \Phi(x) + S_{\text{ct},n}[\varphi, \Phi; K_\Phi]$, donde $S_{0,\text{libre}}$ es la parte libre, por tanto de orden \hbar^0 , de la acción y $S_{0,\text{int}}$, el término de interacción de la acción de partida, también de orden \hbar^0 , y $S_{\text{ct},n} = \sum_{m=1}^n \hbar^m S_{\text{ct}}^{(m)}$ representa la suma de todos los contratérminos regularizados añadidos a la acción de partida. Estos contratérminos podrán ser singulares, es decir divergentes cuando $d - 4$ tienda a 0 o no. Para la deducción siguiente será indiferente.

Los símbolos φ y Φ representan conjuntos de campos que cambian bajo transformaciones BRS arbitrarias de forma lineal y no lineal, respectivamente. Denotaremos por $s_d \phi(x)$ y $s_d \Phi(x)$ las generalizaciones en “ d dimensiones” de dichas transformaciones. Por supuesto, $s_d K_\Phi(x) = 0$

Definimos

$$S_{\text{INT}}[\varphi, \Phi; J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi] = S_{\text{int},n}[\varphi, \Phi; K_\Phi] + \int d^d x (J_\varphi(x) \varphi(x) + J_\Phi(x) \Phi(x)) \quad (\text{A.2})$$

Introducimos el generador funcional Z_{DReg} de las funciones de Green regularizadas

$$Z_{\text{DReg}}[J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi] = \langle \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}[\varphi, \Phi; J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi] \right\} \rangle_0, \quad (\text{A.3})$$

donde el símbolo $\langle \cdots \rangle_0$ se define como en la ec. (2.9).

Definimos también $\hat{\Delta}$ y Δ_{ct} como

$$\hat{\Delta} = s_d S_0, \quad \Delta_{\text{ct}} = s_d S_{\text{ct},n}, \quad (\text{A.4})$$

donde $S_0 = S_{0,\text{libre}}[\varphi; \Phi] + S_{0,\text{int}}[\varphi, \Phi] + \int d^d x K_\Phi(x) s_d \Phi(x)$, es decir la acción completa a orden \hbar^0 en regularización dimensional.

Por motivos que estarán claros más adelante, introducimos $S_{\text{INT}}^{(\Upsilon)}$:

$$S_{\text{INT}}^{(\Upsilon)} = S_{\text{INT}}[\varphi, \Phi; J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi] + S_{\text{aux}}, \quad (\text{A.5})$$

donde

$$S_{\text{aux}} = \int d^d x \left(\Upsilon_1(x) \hat{\Delta}(x) + \Upsilon_2(x) \Delta_{\text{ct}}(x) + \Upsilon_3^\Phi(x) \frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_\Phi(x)} \right), \quad (\text{A.6})$$

y $\hat{\Delta} = \int d^d x \hat{\Delta}(x)$ y $\Delta_{\text{ct}} = \int d^d x \Delta_{\text{ct}}(x)$. Υ_i , $i = 1, 2$ y 3 son campos externos. Definimos $s_d \Upsilon_i(x) = 0$.

Entonces, introducimos el generador funcional Z_{DReg}^Υ de esta forma:

$$Z_{\text{DReg}}^\Upsilon[J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi, \Upsilon_1, \Upsilon_2, \Upsilon_3^\Phi] = \left\langle \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}^\Upsilon[\varphi, \Phi; J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi, \Upsilon_i] \right\} \right\rangle_0, \quad (\text{A.7})$$

donde $\langle \cdots \rangle_0$ se define como en Z_{DReg} , por lo que la siguiente ecuación es cierta en regularización dimensional

$$Z_{\text{DReg}}[J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi] = Z_{\text{DReg}}^\Upsilon[J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi, \Upsilon_1 = 0, \Upsilon_2 = 0, \Upsilon_3^\Phi = 0] \quad (\text{A.8})$$

Los *principios de acción regularizada* (véase la ec. (2.12)) implican que la siguiente ecuación es cierta en regularización dimensional:

$$\begin{aligned} s_d Z_{\text{DReg}}^\Upsilon &\equiv \int d^d x \left\langle \left(\hat{\Delta}(x) + \Delta_{\text{ct}}(x) + (-1)^\varphi J_\varphi(x) s\varphi(x) + (-1)^\Phi J_\Phi(x) s\Phi(x) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \text{términos proporcionales a } \Upsilon_i \right) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}^\Upsilon[\varphi, \Phi, J_\varphi, J_\Phi, K_\Phi, \Upsilon_i] \right\} \right\rangle_0 = 0. \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

Utilizando la ec. (2.11), se llega fácilmente a

$$\left\langle J_\varphi(x) s\varphi(x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}^\Upsilon \right\} \right\rangle_0 = \frac{\hbar}{i} J_\varphi(x) \left[a_{\varphi\varphi} \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta J_\varphi(x)} + a_{\varphi\Phi} \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta J_\Phi(x)} \right] \quad (\text{A.10})$$

y

$$\begin{aligned} \left\langle J_\Phi(x) s\Phi(x) \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} S_{\text{INT}}^\Upsilon \right\} \right\rangle_0 &= J_\Phi(x) \left\langle \frac{\delta(S^\Upsilon - S_{\text{ct},n} - S_{\text{aux}})}{\delta K_\Phi(x)} \right\rangle_0 = \\ &= \frac{\hbar}{i} J_\Phi(x) \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta K_\Phi(x)} - \frac{\hbar}{i} J_\Phi(x) \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_3^\Phi(x)} + \text{términos proporcionales a } \Upsilon_i. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Las transformaciones lineales $s_d \varphi$ tendrán la forma más general de $s_d \varphi = a_{\varphi\varphi} \varphi + a_{\varphi\Phi} \Phi$.

Por tanto, substituyendo las ecs. (A.10) y (A.11) en la ec. (A.9), se llega a

$$\int d^d x \left[(-1)^\varphi \frac{\hbar}{i} J_\varphi(x) \left(a_{\varphi\varphi} \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta J_\varphi(x)} + a_{\varphi\Phi} \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta J_\Phi(x)} \right) + (-1)^\Phi \frac{\hbar}{i} J_\Phi(x) \left(\frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{K_\Phi(x)} - \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_3^\Phi(x)} \right) \right. \\ \left. + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_1(x)} + \frac{\hbar}{i} \frac{\delta Z_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_2(x)} + \text{términos proporcionales a } \Upsilon_i \right] = 0. \quad (\text{A.12})$$

Introduzcamos, como es habitual, los generadores funcionales $Z_{c\text{DReg}}^\Upsilon[J_\varphi, J_\Phi; K_\Phi, \Upsilon_i]$ y $\Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon[\varphi, \Phi; K_\Phi, \Upsilon_i]$:

$$Z_{\text{DReg}}^\Upsilon[J_\varphi, J_\Phi; K_\Phi, \Upsilon_i] = \exp \left(\frac{i}{\hbar} Z_{c\text{DReg}}^\Upsilon[J_\varphi, J_\Phi; K_\Phi, \Upsilon_i] \right) \\ \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon[\varphi, \Phi; K_\Phi, \Upsilon_i] = Z_{c\text{DReg}}^\Upsilon[J_\varphi, J_\Phi; K_\Phi, \Upsilon_i] - \int d^d x (J_\varphi(x) \varphi(x) + J_\Phi(x) \Phi(x)). \quad (\text{A.13})$$

donde estos funcionales deben entenderse como series formales en \hbar y en los campos, tanto externos como cuánticos. Por la ec. (A.13), la ec. (A.12) se transforma en la siguiente ecuación para el funcional 1PI $\Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon[\varphi, \Phi; K_\Phi, \Upsilon_i]$:

$$\int d^d x \left[- \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \varphi(x)} (a_{\varphi\varphi} \varphi(x) + a_{\varphi\Phi} \Phi(x)) - \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Phi(x)} \left(\frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta K_\Phi(x)} - \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_3^\Phi(x)} \right) \right. \\ \left. + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_1(x)} + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_3^\Phi(x)} + \text{term prop. to } \Upsilon_i \right] = 0 \quad (\text{A.14})$$

Fijando ahora $\Upsilon_i(x) = 0, \forall i$, en esta ecuación y teniendo en cuenta que

$$\Gamma_{\text{DReg}}[\varphi, \Phi; K_\Phi] = \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon[\varphi, \Phi; K_\Phi, \Upsilon_i = 0](()) \quad \text{A.15}$$

obtenemos

$$\int d^d x (s_d \varphi) \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \varphi(x)} + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \Phi(x)} = \\ \int d^d x \left[\hat{\Delta}(x) \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + \Delta_{\text{ct}}(x) \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + \left(\frac{\delta S_{\text{ct}}}{\delta K_\Phi(x)} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right) \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta \Phi(x)} \right]. \quad (\text{A.16})$$

Nótese que

$$\left[\frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta K_\Phi(x)} - \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_3^\Phi(x)} \right]_{\Upsilon_i=0} = \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta K_\Phi(x)} - \frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_\Phi(x)} \cdot \Gamma_{\text{DReg}}, \\ \left[\frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_1(x)} \right]_{\Upsilon_i=0} = \hat{\Delta}(x) \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \quad y \\ \left[\frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}^\Upsilon}{\delta \Upsilon_2(x)} \right]_{\Upsilon_i=0} = \Delta_{\text{ct}}(x) \cdot \Gamma_{\text{DReg}}, \quad (\text{A.17})$$

El último término del lado derecho de la ec. (A.16) presenta una forma complicada y no lineal en Γ_{DReg} . De hecho, es el único término que no tiene la forma de la inserción de un operador en el funcional generador 1PI regularizado. Nuestro propósito ahora es encontrar una expresión equivalente que tenga la forma de una inserción sobre Γ_{DReg} .

Para ello, utilizaremos la siguiente identidad general, que es una consecuencia directa de los principios de acción regularizada (2.12) y (2.11) si se considera la variación $\delta\phi = P[\phi]\theta(x)$ de una cierta acción S siendo $\theta(x)$ una función arbitraria y ϕ cualquier campo de la acción:

$$\left[P[\phi](x) \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right] \cdot Z_{\text{DReg}} + J_\phi [P[\phi](x)] \cdot Z_{\text{DReg}} = 0 \quad (\text{A.18})$$

Redefiniendo la acción S para incluir acoplamientos de campos externos a los operadores que aparecen como inserciones en la ec. (A.18), realizando la transformada de Legendre como siempre, teniendo cuidado con los signos en el caso de campos anticomutantes y fijando los campos externos a 0 se llega a:

$$\left[P[\phi](x) \frac{\delta S}{\delta\phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} = \left(P[\phi](x) \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right) \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta\phi(x)}. \quad (\text{A.19})$$

Si ahora aplicamos esta identidad a la ec. (A.16) con $P[\phi] = \frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_\Phi(x)}$, entonces su término derecho ya tiene la forma deseada de una inserción:

$$\left(\frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_\Phi(x)} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right) \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta\Phi(x)} = \left[\frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta(S_0 + S_{\text{ct},n})}{\delta\Phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}, \quad (\text{A.20})$$

con lo que hemos obtenido la ecuación fundamental, válida tanto si $S_{\text{ct},n}$ incluye contratérminos singulares como si no,

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma_{\text{DReg}}) &\equiv \int d^d x (s_d \varphi) \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta\varphi(x)} + \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{DReg}}}{\delta\Phi(x)} = \\ &= \hat{\Delta} \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + [s_d S_{\text{ct},n}] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} + \int d^d x \left\{ \left[\frac{\delta S_{\text{ct},n}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta(S_0 + S_{\text{ct},n})}{\delta\Phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{DReg}} \right\}. \\ &= [\mathcal{S}(S_0 + S_{\text{ct},n})] \cdot \Gamma_{\text{DReg}}, \end{aligned} \quad (\text{A.21})$$

que nos será de gran utilidad para analizar a todo orden en \hbar de forma directa el término de ruptura de las identidades asociadas a simetrías como la simetría BRS, es decir identidades como la de Slavnov-Taylor.

La ec. (A.21) es válida en concreto si en $S_{\text{ct},n}$ no se han incluido contratérminos singulares, y, en ese caso, es por tanto una identidad entre expresiones divergentes cuando $\text{LIM}_{d \rightarrow 4}$. Entonces, por un teorema de la ref. [12], las expresiones renormalizadas correspondientes por substracción mínima satisfacen la misma identidad, siempre y cuando no haya dependencia explícita en d en las variaciones s_d , es decir

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\Gamma_{\text{Ren}}) &\equiv \int d^4 x (s \varphi) \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta\varphi(x)} + \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta \Gamma_{\text{Ren}}}{\delta\Phi(x)} = \\ &= N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + N[s_d S_{\text{fct},n}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} + \int d^4 x \left\{ N \left[\frac{\delta S_{\text{fct},n}}{\delta K_\Phi(x)} \frac{\delta(S_0 + S_{\text{fct},n})}{\delta\phi(x)} \right] \cdot \Gamma_{\text{Ren}} \right\}. \\ &= N[\mathcal{S}(S_0 + S_{\text{fct},n})] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}, \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

donde Γ_{Ren} es el funcional 1PI renormalizado por susbtracción mínima, $N[\mathcal{O}] \cdot \Gamma_{\text{Ren}}$ la inserción renormalizada por substracción mínima de un operador \mathcal{O} en los diagramas 1PI y $S_{\text{fct},n}$ son los contratérminos finitos arbitrarios de orden $\hbar^{(m)}$, con $1 \leq m \leq n$, añadidos a la acción de partida, por ejemplo, para satisfacer ciertas condiciones de normalización o para simplificar el lado derecho de la misma ec. (A.22).

Apéndice B.

Diagramas con término de ruptura en Yang Mills quiral

* a) De las funciones 1PI con un campo ω y un campo A (fig. 6)

$$\begin{aligned}
 \beta_1^{ab} &= -(-i)^3 \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_2 \equiv -p_1) A_\mu^b(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^2 \bar{p}_{1\mu} \\
 &= -\frac{1}{48} \frac{(-i)^3 \partial^3}{\partial \bar{p}_1^\nu \partial \bar{p}_{1\nu} \partial \bar{p}_{1\mu}} \text{ r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(-p_1) A_\mu^b(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \Big|_{p_i \equiv 0} \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{3} \delta^{ab} \hbar^1 + O(\hbar^2), \tag{B.1}
 \end{aligned}$$

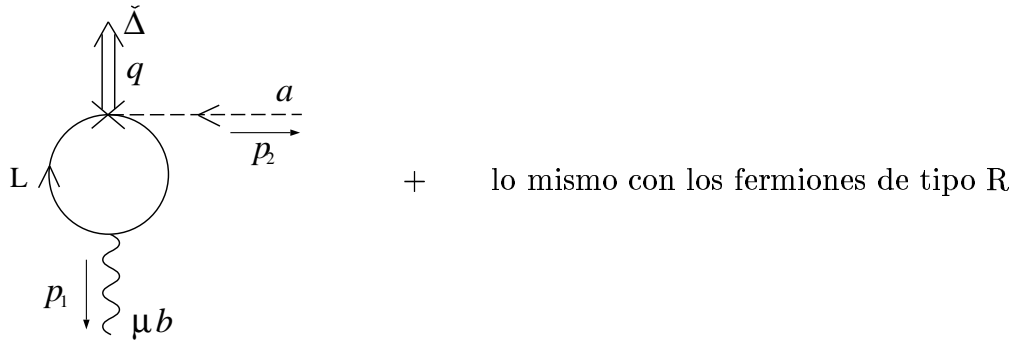


Figura 6: 1PI Diagramas de Feynman necesarios para calcular la ec. (B.1)

* b) De las funciones 1PI con un campo ω y dos campos A , y sin el tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (fig. 7)

$$\{\beta_2^{abc}, \beta_4^{abc}\} =$$

$$\begin{aligned}
&= -(-i)^2 \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_3 \equiv -p_1 - p_2) A_\mu^b(p_1) A_\nu^c(p_2) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de} \\
&\quad \{\bar{p}_1^2 \bar{g}_{\mu\nu}, \bar{p}_{1\mu} \bar{p}_{1\nu}\} \text{ respectivamente} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} (T_L + T_R) c^{abc} \left\{ -\frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right\} \hbar^1 + O(\hbar^2), \tag{B.2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{\beta_3^{abc} = \beta_3^{acb}, \beta_5^{abc} = \beta_5^{acb}, \beta_6^{abc} = \beta_6^{acb}\} = \\
&= -\frac{(-i)^2}{2} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_3 \equiv -p_1 - p_2) A_\mu^b(p_1) A_\nu^c(p_2) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de} \\
&\quad \{\bar{p}_1 \cdot \bar{p}_2 \bar{g}_{\mu\nu}, \bar{p}_{1\mu} \bar{p}_{2\nu}, \bar{p}_{1\nu} \bar{p}_{2\mu}\} \text{ resp.} \\
&= 0 \hbar^1 + O(\hbar^2), \tag{B.3}
\end{aligned}$$

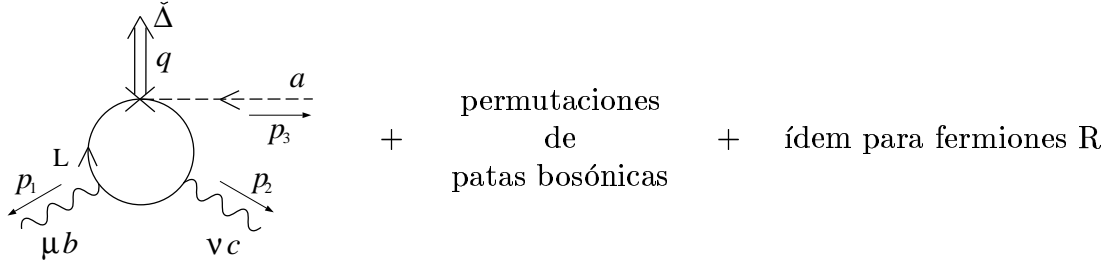


Figura 7: 1PI Diagramas de Feynman necesarios para calcular las ecs. (B.2), (B.3) y (B.12)

* c) De las funciones 1PI con un campo ω y tres campos A , y sin el tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (fig. 8)

$$\begin{aligned}
\beta_7^{abcd} &= \beta_7^{abdc} = \\
&= -\frac{(-i)}{2} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(-\sum_i^3 p_i) A_\mu^b(p_1) A_\nu^c(p_2) A_\rho^d(p_3) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de} \\
&\quad \bar{p}_{1\mu} \bar{g}_{\nu\rho} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} [T_{L+R}^{abcd} + T_{L+R}^{acdb} + T_{L+R}^{abdc} + T_{L+R}^{adcb} - T_{L+R}^{acbd} - T_{L+R}^{adbc}] \hbar^1 + O(\hbar^2), \tag{B.4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_8^{abcd} &= -(-i) \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(-\sum_i^3 p_i) A_\mu^b(p_1) A_\nu^c(p_2) A_\rho^d(p_3) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de} \\
&\quad (\bar{p}_{1\nu} \bar{g}_{\mu\rho} + \bar{p}_{1\rho} \bar{g}_{\mu\nu}) \\
&= \frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} [T_{L+R}^{abdc} + T_{L+R}^{acbd} + T_{L+R}^{acdb} + T_{L+R}^{adbc} - T_{L+R}^{abcd} - T_{L+R}^{adcb}] \hbar^1 + O(\hbar^2), \tag{B.5}
\end{aligned}$$

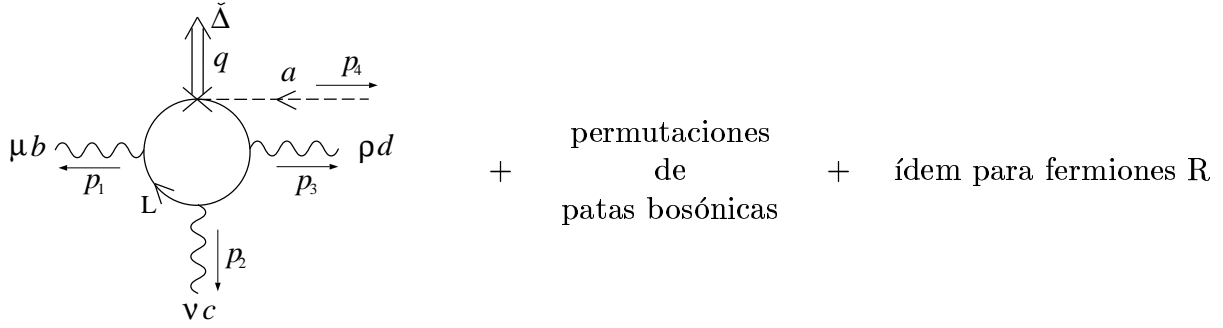


Figura 8: Diagramas 1PI de Feynman necesarios para calcular las ecs. (B.4), (B.5) y (B.13)

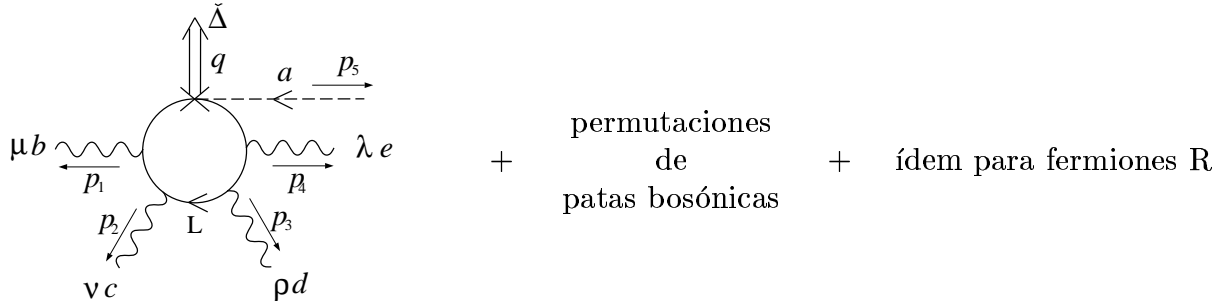


Figura 9: 1PI Diagramas de Feynman necesarios para calcular las ecs. (B.6) y (B.14)

* d) De funciones 1PI con un campo ω y cuatro campos A y sin el tensor $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (fig. 9)

$$\begin{aligned}
 \beta_9^{abcde} &= \beta_9^{a\{bc\}\{de\}} = \beta_9^{a\{de\}\{bc\}} = \\
 &= -\frac{1}{8} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a A_\mu^b A_\nu^c A_\rho^d A_\lambda^e N[\tilde{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{g}_{\mu\nu} \\
 &= 0 \hbar^1 + O(\hbar^2),
 \end{aligned} \tag{B.6}$$

En principio, debido a la presencia de γ_5 , deberían incluirse también productos normales evanescentes en el desarrollo de la inserción anómala $N[\hat{\Delta}] \cdot \Gamma_{\text{ren}}$. Por ejemplo, el coeficiente de $\int N[\omega^a \hat{\square} \bar{\partial}_\mu A^{b\mu}]$ es

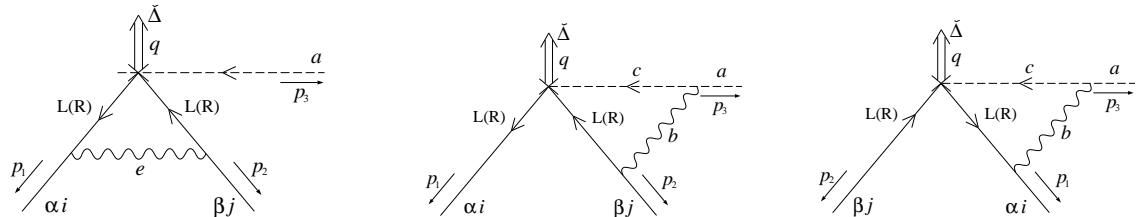
$$\begin{aligned}
 &- (-i)^3 \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_2 \equiv -p_1) A_\mu^b(p_1) N[\tilde{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de } \hat{p}_1^2 \bar{p}_{1\mu} \\
 &= - \frac{1}{8(d-4)} \frac{(-i)^3 \partial^3}{\partial \hat{p}_1^\nu \partial \hat{p}_{1\nu} \partial \bar{p}_{1\mu}} \text{ r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(-p_1) A_\mu^b(p_1) N[\tilde{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \Big|_{p_i \equiv 0}
 \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{T_L + T_R}{3} \delta^{ab} \hbar^1 + O(\hbar^2),$$

y el de $\int N[\omega^a \bar{\square} \hat{\partial}_\mu A^{b\mu}]$ es

$$\begin{aligned} & -(-i)^3 \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_2 \equiv -p_1) A_\mu^b(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de } \bar{p}_1^2 \hat{p}_{1\mu} \\ &= -\frac{1}{8(d-4)} \frac{(-i)^3 \partial^3}{\partial \bar{p}_1^\nu \partial \bar{p}_{1\nu} \partial \hat{p}_{1\mu}} \text{ r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(-p_1) A_\mu^b(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \Big|_{p_i \equiv 0} \\ &= 0 \hbar^1 + O(\hbar^2), \end{aligned}$$

y así con todos los demás. Debido a que se realiza el desarrollo en términos de objetos “barrados” y “con gorro” en vez de en términos de objetos “normales” y “con gorro”, y debido a la forma de la interacción regularizada elegida resulta que *el resto de los coeficientes anómalos son 0 en la aproximación de un “loop”*. En cualquier caso, como ya se comentó en la sección 2.6., estos coeficientes anómalos sólo importan en el siguiente orden perturbativo, por lo que la anulación de estos coeficientes es sólo una simplificación relevante en cálculos de órdenes superiores.



$$\begin{aligned} & (T_{L(R)}^e T_{L(R)}^a T_{L(R)}^e)_{ij} = \\ &= (C_{L(R)} - \frac{C_A}{2}) (T_{L(R)}^a)_{ij} \\ & c_{bac} (T_{L(R)}^{[c} T_{L(R)}^{b]})_{ij} = \\ &= \frac{i}{2} c_{acb} c_{bce} (T_{L(R)}^e)_{ij} = \\ &= \frac{i}{2} C_A (T_{L(R)}^a)_{ij} \\ & c_{bac} (T_{L(R)}^{[b} T_{L(R)}^{c]})_{ij} = \\ &= -\frac{i}{2} c_{abc} c_{bce} (T_{L(R)}^e)_{ij} = \\ &= -\frac{i}{2} C_A (T_{L(R)}^a)_{ij} \end{aligned}$$

Figura 10: Diagramas 1PI de Feynman necesarios para calcular las ecs. (B.7) y (B.8). (Nótese que la estructura del grupo gauge se muestra explícitamente bajo estos diagramas y todos los siguientes)

* e) De funciones 1PI con un ω y un par $\psi, \bar{\psi}$ ($\psi', \bar{\psi}'$) (fig. 10)

$$\begin{aligned} \beta_{10L(R)}^{a,ij} &= -(-i) \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_3 \equiv -p_1 - p_2) \psi_{\beta j}^{(i)}(p_2) \bar{\psi}_{\alpha i}^{(j)}(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de } \\ & (\bar{p}_2 P_{L(R)})_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{4 \cdot 2} \frac{(-i) \partial}{\partial \bar{p}_2^\mu} \text{ r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(-p_1 - p_2) \psi_{\beta j}^{(i)}(p_2) \bar{\psi}_{\alpha i}^{(j)}(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \Big|_{p \equiv 0} \cdot (P_{L(R)} \bar{\gamma}^\mu)_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i}{4 \cdot 2} \text{Tr} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{p}_2^\mu} \text{r.s.p.} \cdot \overline{\langle \omega^a(-p_1 - p_2) \psi_j^{(i)}(p_2) \bar{\psi}_i^{(i)}(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{\text{1PI}} \Big|_{p_i \equiv 0} P_{L(R)} \bar{\gamma}^\mu \right] \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left\{ (C_{L(R)} - \frac{C_A}{4}) [T_{L(R)}^a]^{ij} + (\alpha' - 1) \left(\frac{C_{L(R)}}{6} - \frac{C_A}{4} \right) [T_{L(R)}^a]^{ij} \right\} \hbar^1 \\
 &\quad + O(\hbar^2).
 \end{aligned} \tag{B.7}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{11L(R)}^{a,ij} &= -(-i) \times \text{coef. del r.s.p.} \cdot \overline{\langle \omega^a(p_3 \equiv -p_1 - p_2) \psi_{\beta j}^{(i)}(p_2) \bar{\psi}_{\alpha i}^{(i)}(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{\text{1PI}} \text{ de} \\
 &\quad (\not{p}_1 P_{L(R)})_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{i}{4 \cdot 2} \text{Tr} \left[\frac{\partial}{\partial \bar{p}_1^\mu} \text{r.s.p.} \cdot \overline{\langle \omega^a(-p_1 - p_2) \psi_j^{(i)}(p_2) \bar{\psi}_i^{(i)}(p_1) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{\text{1PI}} \Big|_{p_i \equiv 0} P_{L(R)} \bar{\gamma}^\mu \right] \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \left\{ (C_{L(R)} - \frac{C_A}{4}) [T_{L(R)}^a]^{ij} + (\alpha' - 1) \left(\frac{C_{L(R)}}{6} - \frac{C_A}{4} \right) [T_{L(R)}^a]^{ij} \right\} \hbar^1 \\
 &\quad + O(\hbar^2).
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

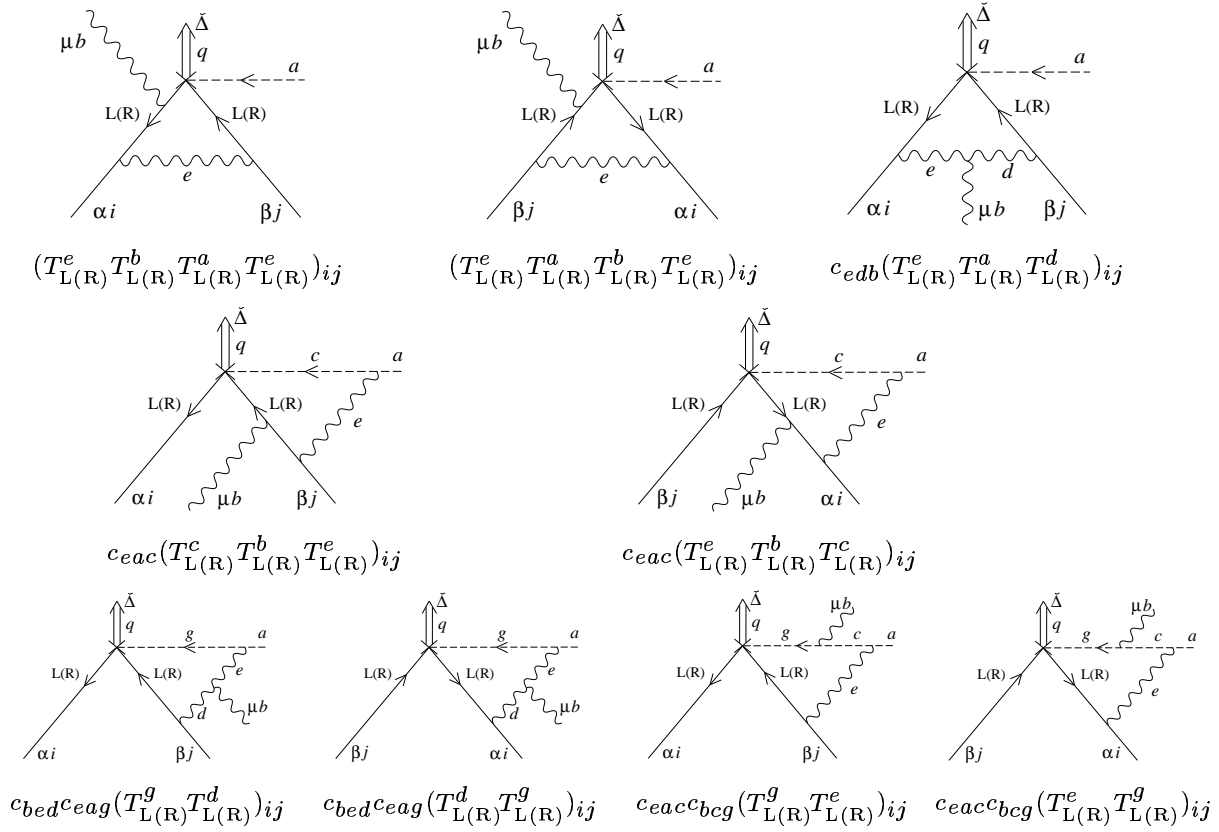


Figura 11: Diagramas 1PI de Feynman necesarios para calcular la ec. (B.9)

* f) De funciones 1PI con un campo ω , un campo A y un par $\psi, \bar{\psi}$ ($\psi', \bar{\psi}'$) (fig. 11)

$$\begin{aligned}
 \beta_{12L(R)}^{ab,ij} &= -1 \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a A_\mu^b \psi_{\beta j}^{(\prime)} \bar{\psi}_{\alpha i}^{(\prime)} N[\check{\Delta}](q=0) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}} \text{ de} \\
 &\quad (\bar{\gamma}^\mu P_{L(R)})_{\alpha\beta} \\
 &= -\frac{1}{4 \cdot 2} \text{Tr} \left[\text{r.s.p. } \overline{\langle \omega^a A_\mu^b \psi_j^{(\prime)} \bar{\psi}_i^{(\prime)} N[\check{\Delta}](q=0) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}} \Big|_{p_i \equiv 0} P_{L(R)} \bar{\gamma}^\mu \right] \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^2} g^2 \frac{1 + (\alpha' - 1)}{4} C_A i [T_{L(R)}^a, T_{L(R)}^b]_{ij} \hbar^1 + O(\hbar^2). \quad (\text{B.9})
 \end{aligned}$$

Nótese que la estructura del grupo de “gauge” de los primeros cinco diagramas de la figura 11 implican tres o más matrices generadoras del grupo de “gauge”. La estructura del grupo en cada diagrama es bastante complicada, pero resulta que el r.s.p. de cada uno de los tres primeros diagramas se anulan, y que el r.s.p. del cuarto cancela exactamente el quinto y, gracias a la identidad de Jacobi, el resultado de los cuatro últimos diagramas combinan en pares para dar la ec. (B.9), donde la estructura del grupo es un simple conmutador.

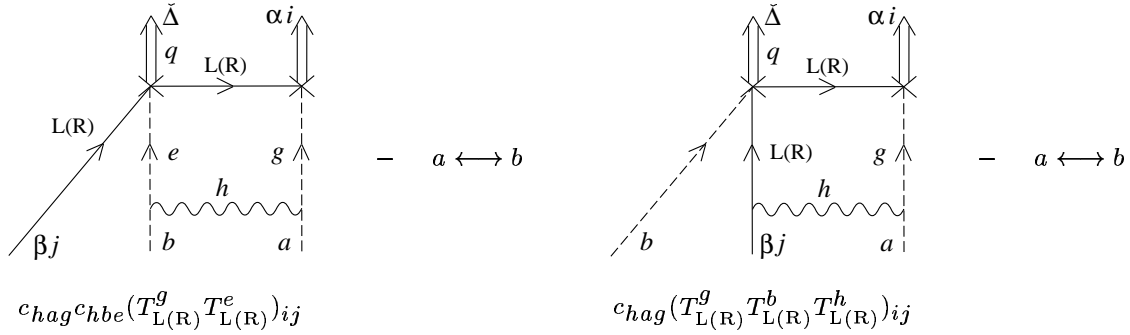


Figura 12: Diagramas 1PI de Feynman necesarias para calcular la ec. (B.10)

* g) De funciones 1PI con fermiones y campos externos (figs. 12-13)

$$\begin{aligned}
 \beta_{14L(R)}^{ab,ij} &= \frac{i}{2\hbar} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a \omega^b \psi_{\beta j}^{(\prime)} N[s\psi_{\alpha i}^{(\prime)}] N[\check{\Delta}](q=0) \rangle_{K=0}^{1\text{PI}}} \text{ de} \\
 &\quad (P_{L(R)})_{\alpha\beta} \\
 &= \frac{1}{(4\pi)^2} g^2 [1 + (\alpha' - 1)] \frac{C_A}{8} [T_{L(R)}^a, T_{L(R)}^b]_{ij} \hbar^1 + O(\hbar^2). \quad (\text{B.10})
 \end{aligned}$$

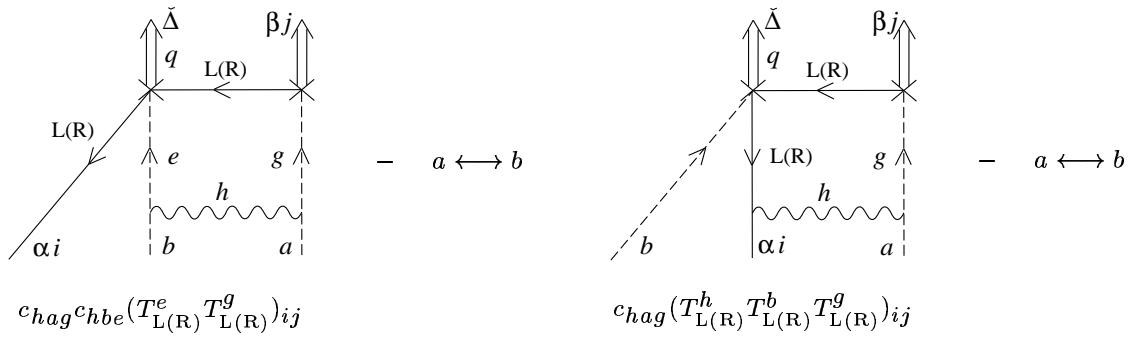


Figura 13: Diagramas 1PI de Feynman necesarios para calcular la ec. (B.11)

$$\begin{aligned}
 \beta_{15L(R)}^{ab,ij} &= \frac{i}{2\hbar} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a \omega^b \bar{\psi}_{\beta j}^{(\prime)} N[s \bar{\psi}_{\alpha i}^{(\prime)}] N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de} \\
 &\quad (P_{R(L)})_{\alpha\beta} \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^2} g^2 [1 + (\alpha' - 1)] \frac{C_A}{8} [T_{L(R)}^a, T_{L(R)}^b]_{ij} \hbar^1 + O(\hbar^2). \quad (\text{B.11})
 \end{aligned}$$

Como en el caso f), parece imposible que la estructura del grupo de “gauge” de los diagramas se ajusta a la estructura de grupo de un contratérmino finito simple a un “loop”. Pero el último par de diagramas de cada función 1PI se anula, y el otro par de diagramas antisimétricos conspiran con la ayuda de la identidad de Jacobi para dar un conmutador simple como resultado.

* h) *De funciones 1PI con $\varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ (figs. 7-9)*

Estos coeficientes son muy importantes, porque si no valen cero, dan monomios en el desarrollo del término de ruptura que no pueden cancelarse con contratérminos finitos; es decir dan la anomalía quiral esencial no abeliana.

$$\begin{aligned}
 \beta_{50}^{abc} &= \beta_{50}^{acb} = \\
 &= -\frac{(-i)^2}{2} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_3 \equiv -p_1 - p_2) A_\mu^b(p_1) A_\nu^c(p_2) N[\check{\Delta}](q=0) \rangle}_{K=0}^{1\text{PI}} \text{ de} \\
 &\quad \varepsilon_{\mu\nu\alpha\beta} p_1^\alpha p_2^\beta \\
 &= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{3} d_{L-R}^{abc} \hbar^1 + O(\hbar^2), \quad (\text{B.12}) \\
 \beta_{51}^{abcd} &= -\beta_{51}^{abdc} =
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{(-i)}{2} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a(p_4 \equiv -\sum_i^3 p_i) A_\mu^b(p_1) A_\nu^c A_\rho^d N[\check{\Delta}](q=0) \rangle_{K=0}^{\text{1PI}}} \text{ de} \\
&\quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\alpha} \bar{p}_1^\alpha \\
&= -\frac{1}{(4\pi)^2} \frac{1}{6} \mathcal{D}_{\text{L-R}}^{abcd} \hbar^1 + O(\hbar^2), \tag{B.13}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_{52}^{abcde} &= \beta_{52}^{a[bcd e]} = -\frac{1}{4!} \times \text{coef. del r.s.p. } \overline{\langle \omega^a A_\mu^b A_\nu^c A_\rho^d A_\lambda^e N[\check{\Delta}](q=0) \rangle_{K=0}^{\text{1PI}}} \text{ de} \\
&\quad \varepsilon_{\mu\nu\rho\lambda} \\
&= O(\hbar^2), \tag{B.14}
\end{aligned}$$

con las definiciones

$$\begin{aligned}
d_{\text{L}}^{abc} &= \text{Tr} [T_{\text{L}}^a \{ T_{\text{L}}^b, T_{\text{L}}^c \}] = d_{\text{L}}^{\{abc\}} \\
\mathcal{D}_{\text{L}}^{abcd} &= -i 3! \text{Tr} [T_{\text{L}}^a T_{\text{L}}^{[b} T_{\text{L}}^c T_{\text{L}}^{d]}] = \frac{1}{2} (d_{\text{L}}^{abe} c^{ecd} + d_{\text{L}}^{ace} c^{edb} + d_{\text{L}}^{ade} c^{ebc});
\end{aligned}$$

y lo mismo para d_{R}^{abc} y $\mathcal{D}_{\text{R}}^{abcd}$, y $d_{\text{L-R}} \equiv d_{\text{L}} - d_{\text{R}}$, $\mathcal{D}_{\text{L-R}} \equiv \mathcal{D}_{\text{L}} - \mathcal{D}_{\text{R}}$.

Apéndice C.

Operador lineal de BRS para el modelo abeliano quiral

Utilizando la definición (4.13), las variaciones de los campos bajo \tilde{b} son

$$\begin{aligned}
\tilde{b} A_\mu &= s A_\mu = \partial_\mu c, \\
\tilde{b} \phi_1 &= s \phi_1 = -\phi_2 c, \\
\tilde{b} \phi_2 &= s \phi_2 = (v + \phi_1) c, \\
\tilde{b} \psi &= s \psi = i c [(\theta + r) P_L + \theta P_R] \psi, \\
\tilde{b} \bar{\psi} &= s \bar{\psi} = i \bar{\psi} [(\theta + r) P_R + \theta P_L] c, \\
\tilde{b} c &= 0, \\
\tilde{b} K_{\phi_1} &= \frac{\delta \tilde{\Gamma}^0}{\delta \phi_1} = \frac{\delta S_0}{\delta \phi_1} = \text{e.o.m. de } \phi_1 = \\
&= -\square \phi_1 - (\partial_\mu A^\mu) \phi_2 - 2 A^\mu (\partial_\mu \phi_2) + A_\mu A^\mu (v + \phi_1) + \mu^2 (v + \phi_1) \\
&\quad - \lambda [(v + \phi_1)^2 + \phi_2^2] (v + \phi_1) + \tilde{K}_{\phi_2} c - f \bar{\psi} \psi, \\
\tilde{b} \tilde{K}_{\phi_2} &= \frac{\delta \tilde{\Gamma}^0}{\delta \phi_2} = \frac{\delta S_0}{\delta \phi_2} = \text{e.o.m. de } \phi_2 - \rho B = \\
&= -\square \phi_2 + (\partial_\mu A^\mu) (v + \phi_1) + 2 A^\mu (\partial_\mu \phi_1) + A_\mu A^\mu \phi_2 + \mu^2 \phi_2 \\
&\quad - \lambda [(v + \phi_1)^2 + \phi_2^2] \phi_2 - K_{\phi_1} c - i r f \bar{\psi} \gamma_5 \psi, \\
\tilde{b} K_\psi &= \frac{\delta \tilde{\Gamma}^0}{\delta \psi} = \text{e.o.m. de } \bar{\psi} = \\
&= \bar{\psi} \left[i \overleftrightarrow{\not{D}} - A((\theta + r) P_L + \theta P_R) \right] + f [(v + \phi_1) \bar{\psi} + i r \phi_2 \bar{\psi} \gamma_5] \\
&\quad - i c K_\psi [(\theta + r) P_L + \theta P_R], \\
\tilde{b} K_{\bar{\psi}} &= \frac{\delta \tilde{\Gamma}^0}{\delta \bar{\psi}} = \text{e.o.m. de } \psi =
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[i \overleftarrow{\not{\partial}} + \not{A}((\theta + r)P_L + \theta P_R) \right] \psi - f[(v + \phi_1)\psi + i r \phi_2 \gamma_5 \psi] \\
&\quad + i c [(\theta + r)P_R + \theta P_L] K_{\bar{\psi}}.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

Por tanto, haciendo actuar estas variaciones sobre la base (4.14) de $\tilde{\mathcal{V}}_0$ y desarrollando los resultado en términos de la base (4.16) de $\tilde{\mathcal{V}}_1$, se calculan fácilmente los elementos de matriz de esta restricción de \tilde{b} , definida como $\tilde{b}\tilde{e}_i \equiv \tilde{b}_0^{j_i} u_j$. Véase la referencia [20].

Apéndice D.

Diagramas a 1 “loop” divergentes en NCYM U(N)

Con 2 bosones de “gauge”

Los diagramas que son divergentes en el ultravioleta en regularización dimensional son los de la figura 14. Nótese que los diagramas de tipo “tadpole” o “renacuajo” no son singulares en regularización dimensional, sino que son nulos.



Figura 14: Diagramas de Feynman 1PI divergentes ultravioleta con 2 bosones de “gauge”.

La parte divergente ultravioleta de cada diagrama en un “gauge” de Lorentz general con λ' como parámetro de “gauge” es

$$\begin{aligned}
 (i) &= 2i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \left[\left(\frac{19}{12} - \frac{(\lambda' - 1)}{2} \right) p^2 g_{\mu_1 \mu_2} - \left(\frac{11}{6} - \frac{(\lambda' - 1)}{2} \right) p_{\mu_1} p_{\mu_2} \right], \\
 (ii) &= 2i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \left[\frac{1}{12} p^2 g_{\mu_1 \mu_2} + \frac{1}{6} p_{\mu_1} p_{\mu_2} \right],
 \end{aligned} \tag{D.1}$$

mientras que la parte divergente no logarítmica cuando el momento externo tiende a 0 es en el “gauge” de Feynman ($\lambda' \equiv 1$):

$$\begin{aligned}
 (i) &= \frac{-i}{(4\pi)^2} \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \left(7 \frac{g^{\mu_1 \mu_2}}{\tilde{p}^2} - 10 \frac{\tilde{p}^{\mu_1} p^{\mu_2}}{\tilde{p}^4} \right), \\
 (ii) &= \frac{i}{(4\pi)^2} \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_2} \left(\frac{g^{\mu_1 \mu_2}}{\tilde{p}^2} - 2 \frac{\tilde{p}^{\mu_1} p^{\mu_2}}{\tilde{p}^4} \right).
 \end{aligned} \tag{D.2}$$

Con 3 bosones de “gauge”

Los diagramas que son divergentes ultravioleta en regularización dimensional son los de la figura 15.

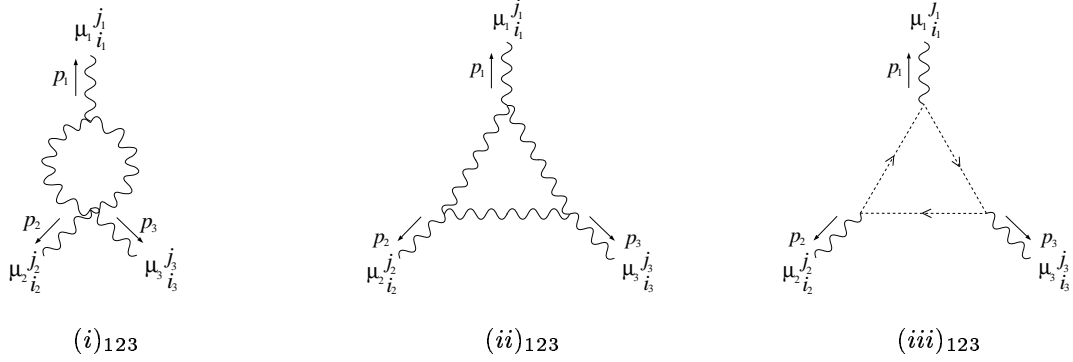


Figura 15: Diagramas de Feynman 1PI divergentes ultravioleta con 3 bosones de “gauge”.

La parte divergente ultravioleta de estos diagramas es

$$\begin{aligned}
 (i)_{123} &= i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{9}{2} + \frac{3(\lambda' - 1)}{4} \right) N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] \times \\
 &\quad \left(p_{1\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} - p_{1\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} \right), \\
 (ii)_{123} &= i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{13}{4} + \frac{9(\lambda' - 1)}{4} \right) N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] \times \\
 &\quad \left((p_2 - p_1)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} - (p_1 + 2p_2)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (p_2 + 2p_1)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} \right), \\
 (iii)_{123} &= i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \frac{1}{12} N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] \times \\
 &\quad \left((-p_1 - 2p_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (2p_1 + p_2)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (p_2 - p_1)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} \right). \tag{D.3}
 \end{aligned}$$

Sumando sobre todas las permutaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
 (I) &= (i)_{123} + (i)_{231} + (i)_{312} = \\
 &\quad i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{9}{2} + \frac{3(\lambda' - 1)}{4} \right) N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] \times \\
 &\quad \left((p_1 - p_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} - (2p_1 + p_2)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} + (p_1 + 2p_2)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} \right), \\
 (II) &= (ii)_{123} = \\
 &\quad i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \left(\frac{13}{4} + \frac{9(\lambda' - 1)}{4} \right) N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] \times
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left((p_2 - p_1)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} - (p_1 + 2p_2)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (p_2 + 2p_1)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} \right), \\
(III) = & (iii)_{123} + (iii)_{213} = \\
& i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) \frac{1}{12} N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] \times \\
& \left((p_1 - p_2)_{\mu_3} g_{\mu_1 \mu_2} + (p_1 + 2p_2)_{\mu_1} g_{\mu_2 \mu_3} + (-2p_1 - p_2)_{\mu_2} g_{\mu_1 \mu_3} \right). \tag{D.4}
\end{aligned}$$

La suma de (I), (II) y (III) da la contribución divergente ultravioleta a la función de 1PI de 3 puntos del bosón de “gauge”. Nótese que cada uno de (I), (II) y (III) son proporcionales al vértice de 3 puntos del bosón de “gauge”.

La contribución divergente dominante en el infrarrojo de cada diagrama es, en el caso del “gauge” de Feynman:

$$\begin{aligned}
(i)_{123} = & \frac{-1}{(4\pi)^2} \left\{ \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_2} (8g^{\mu_2 \mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_1} + 2g^{\mu_1 \mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_2} + 2g^{\mu_1 \mu_2} \tilde{p}_1^{\mu_3}) \frac{1}{\tilde{p}_1^2} \right. \\
& + \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i_3}^{j_1} (8g^{\mu_2 \mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_1} + 2g^{\mu_1 \mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_2} + 2g^{\mu_1 \mu_2} \tilde{p}_2^{\mu_3}) \frac{1}{\tilde{p}_2^2} \\
& + \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_3} (8g^{\mu_2 \mu_3} \tilde{p}_3^{\mu_1} + 2g^{\mu_1 \mu_3} \tilde{p}_3^{\mu_2} + 2g^{\mu_1 \mu_2} \tilde{p}_3^{\mu_3}) \frac{1}{\tilde{p}_3^2} \\
(ii)_{123} = & \frac{-1}{(4\pi)^2} \left\{ \delta_{i_1}^{j_1} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_2} \left[18 \frac{\tilde{p}_1^{\mu_1} \tilde{p}_1^{\mu_2} \tilde{p}_1^{\mu_3}}{\tilde{p}_1^4} - (g^{\mu_2 \mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_1} + g^{\mu_1 \mu_3} \tilde{p}_1^{\mu_2} + g^{\mu_1 \mu_2} \tilde{p}_1^{\mu_3}) \frac{13}{\tilde{p}_1^2} \right] \right. \\
& + \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_2} \delta_{i_3}^{j_1} \left[18 \frac{\tilde{p}_2^{\mu_1} \tilde{p}_2^{\mu_2} \tilde{p}_2^{\mu_3}}{\tilde{p}_2^4} - (g^{\mu_2 \mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_1} + g^{\mu_1 \mu_3} \tilde{p}_2^{\mu_2} + g^{\mu_1 \mu_2} \tilde{p}_2^{\mu_3}) \frac{13}{\tilde{p}_2^2} \right] \\
& + \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_3} \left[18 \frac{\tilde{p}_3^{\mu_1} \tilde{p}_3^{\mu_2} \tilde{p}_3^{\mu_3}}{\tilde{p}_3^4} - (g^{\mu_2 \mu_3} \tilde{p}_3^{\mu_1} + g^{\mu_1 \mu_3} \tilde{p}_3^{\mu_2} + g^{\mu_1 \mu_2} \tilde{p}_3^{\mu_3}) \frac{13}{\tilde{p}_3^2} \right] \\
& \left. \right\}. \tag{D.5}
\end{aligned}$$

Con 4 bosones de “gauge”

La contribución divergente ultravioleta a la función de 4 puntos del bosón de “gauge” se calcula usumando sobre las partes ultravioletas de los diagramas de la figura 16 y sobre las permutaciones adecuadas de estos diagramas.

La parte divergente ultravioleta de los diagramas de la figura 16 es

$$\begin{aligned}
(i)_{1234} = & i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left\{ \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_2} \right) \right.
\end{aligned}$$

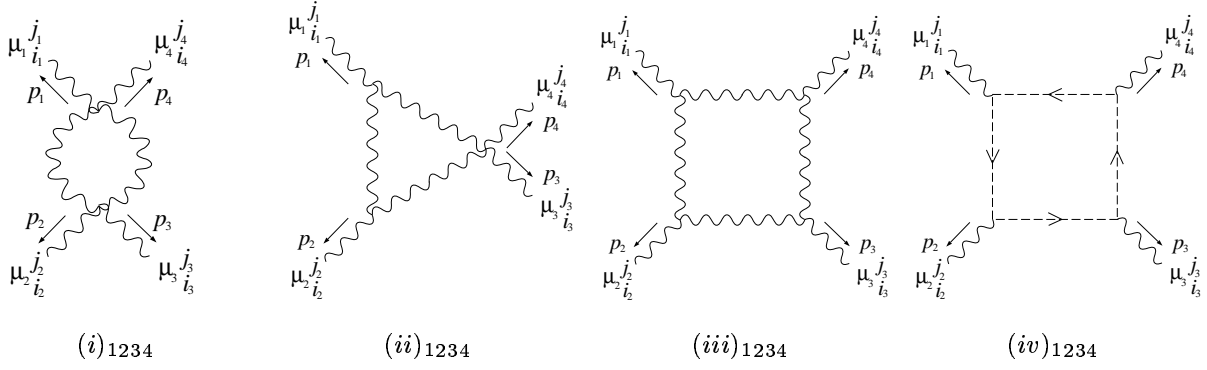


Figura 16: Diagramas 1PI de Feynman divergentes ultravioleta con 4 bosones de “gauge”.

$$\begin{aligned}
& \left[\left(2 + (\lambda' - 1) + \frac{13(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \quad \left(5 + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \quad \left. \left(-4 - 2(\lambda' - 1) + \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] + \\
& \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \\
& \left[\left(2 + (\lambda' - 1) + \frac{13(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \quad \left(-4 - 2(\lambda' - 1) + \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \quad \left. \left(5 + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] \Bigg\}, \\
(ii)_{1234} &= i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left\{ \left(e^{i[\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_2} + e^{i[-\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \right. \\
& \quad \left[\left(2 + \frac{17(\lambda' - 1)}{8} - \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \quad \left(-\frac{5}{2} - \frac{19(\lambda' - 1)}{8} - \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \quad \left. \left(-\frac{13}{4} - \frac{13(\lambda' - 1)}{8} - \frac{13(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] + \\
& \quad \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\left(-\frac{5}{2} - \frac{19(\lambda' - 1)}{8} - \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \quad \left(2 + \frac{17(\lambda' - 1)}{8} - \frac{(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \quad \left. \left(-\frac{13}{4} - \frac{13(\lambda' - 1)}{8} - \frac{13(\lambda' - 1)^2}{24} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] \Bigg\}, \\
(iii)_{1234} &= i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left\{ \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \right. \\
& \quad \left[\left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \quad \left(\frac{17}{12} - \frac{(\lambda' - 1)}{2} + \frac{(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \quad \left. \left. \left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] \right\}, \\
(iv)_{1234} &= -\frac{i}{24} \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \\
& \quad (g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4}). \tag{D.6}
\end{aligned}$$

Sumando sobre todas las permutaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
(I) &= (i)_{1234} + (i)_{3214} + (i)_{2134} = \\
&= i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left\{ \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_2} \right) \right. \\
& \quad \left[\left(7 + \frac{7(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \quad \left(7 + \frac{7(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \quad \left. \left. \left(-8 - 4(\lambda' - 1) + \frac{(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] + \right. \\
& \quad \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \\
& \quad \left[\left(7 + \frac{7(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(-8 - 4(\lambda' - 1) + \frac{(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \left(7 + \frac{7(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \Big] + \\
& \left(e^{i[\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_2} + e^{i[-\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \\
& \left[\left(-8 - 4(\lambda' - 1) + \frac{(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \left(7 + \frac{7(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \left. \left(7 + \frac{7(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] \Big\}, \\
(II) = & (ii)_{1234} + (ii)_{1324} + (ii)_{1423} + (ii)_{2314} + (ii)_{2413} + (ii)_{3412} = \\
= & i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left\{ \left(e^{i[\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_2} + e^{i[-\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \right. \\
& \left[\left(8 + \frac{17(\lambda' - 1)}{2} - \frac{(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \left(-\frac{23}{2} - 8(\lambda' - 1) - \frac{7(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \left. \left(-\frac{23}{2} - 8(\lambda' - 1) - \frac{7(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] + \\
& \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \\
& \left[\left(-\frac{23}{2} - 8(\lambda' - 1) - \frac{7(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \left(8 + \frac{17(\lambda' - 1)}{2} - \frac{(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \left. \left(-\frac{23}{2} - 8(\lambda' - 1) - \frac{7(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] + \\
& \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_2} \right) \\
& \left[\left(-\frac{23}{2} - 8(\lambda' - 1) - \frac{7(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \left. \left(-\frac{23}{2} - 8(\lambda' - 1) - \frac{7(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(8 + \frac{17(\lambda' - 1)}{2} - \frac{(\lambda' - 1)^2}{6} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \Big] \Big\}, \\
(III) = & (iii)_{1234} + (iii)_{1324} + (iii)_{1243} = \\
& = i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left\{ \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \right. \\
& \left[\left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \left(\frac{17}{12} - \frac{(\lambda' - 1)}{2} + \frac{(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \left. \left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] + \\
& \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_2} \right) \\
& \left[\left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \left. \left(\frac{17}{12} - \frac{(\lambda' - 1)}{2} + \frac{(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] + \\
& \left(e^{i[\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_2} + e^{i[-\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_3} \right) \\
& \left[\left(\frac{17}{12} - \frac{(\lambda' - 1)}{2} + \frac{(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_4} g_{\mu_2 \mu_3} + \right. \\
& \left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_3} g_{\mu_2 \mu_4} + \\
& \left. \left(\frac{47}{12} + \frac{5(\lambda' - 1)}{2} + \frac{7(\lambda' - 1)^2}{12} \right) g_{\mu_1 \mu_2} g_{\mu_3 \mu_4} \right] \Big\}, \\
(IV) = & (iv)_{1234} + (iv)_{1324} + (iv)_{1243} + (iv)_{1432} + (iv)_{1342} + (iv)_{1423} = \\
& = -\frac{i}{12} \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) N \times \\
& \left(e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_3} + \right. \\
& e^{i[-\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_2} \delta_{i_4}^{j_1} + e^{i[\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_4} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_2} + \\
& \left. e^{i[\omega(p_1, p_2) - \omega(p_1, p_3) - \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_4} \delta_{i_4}^{j_2} + e^{i[-\omega(p_1, p_2) + \omega(p_1, p_3) + \omega(p_2, p_3)]} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_4} \delta_{i_3}^{j_1} \delta_{i_4}^{j_3} \right)
\end{aligned}$$

$$(g_{\mu_1\mu_4} g_{\mu_2\mu_3} + g_{\mu_1\mu_3} g_{\mu_2\mu_4} + g_{\mu_1\mu_2} g_{\mu_3\mu_4}) . \quad (\text{D.7})$$

La suma (I) + (II) + (III) + (IV) es la parte divergente ultravioleta de la función de 4 puntos del bosón de “gauge” en el esquema MS. Nótese que cada uno de (I), (II), (III) y (IV) no son proporcionales al vértice de 4 puntos del nivel árbol.

Con campos “fantasmas”

Los diagramas necesarios para calcular la autoenergía de los campos “fantasmas” y su vértice con el bosón de “gauge” se muestra en la figura 17.

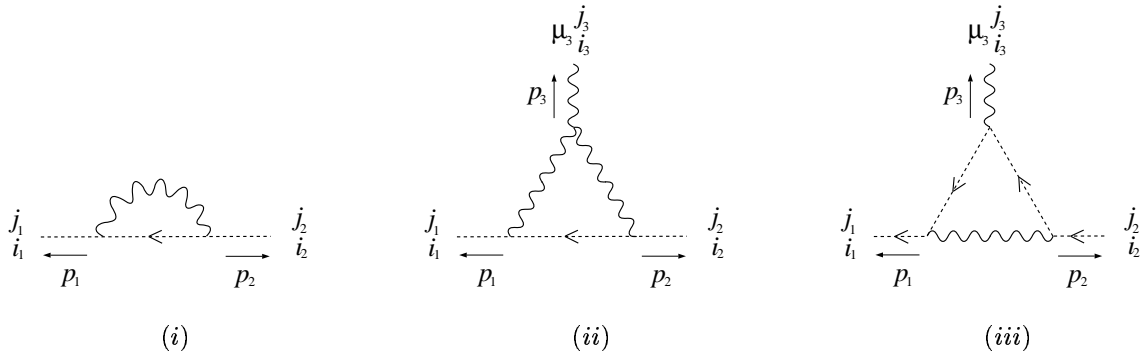


Figura 17: Diagramas 1PI de Feynman divergentes ultravioleta para las funciones con campos “fantasmas”.

Se han obtenido los siguientes resultados

$$\begin{aligned}
 (i) &= -i \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 \left(1 - \frac{\lambda' - 1}{2} \right) N \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} p_1^2, \\
 (ii) &= 3 \frac{i}{4} \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 (1 + (\lambda' - 1)) \\
 &\quad N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] p_1 \mu_3, \\
 (iii) &= \frac{i}{4} \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 (1 + (\lambda' - 1)) \\
 &\quad N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] p_1 \mu_3. \quad (\text{D.8})
 \end{aligned}$$

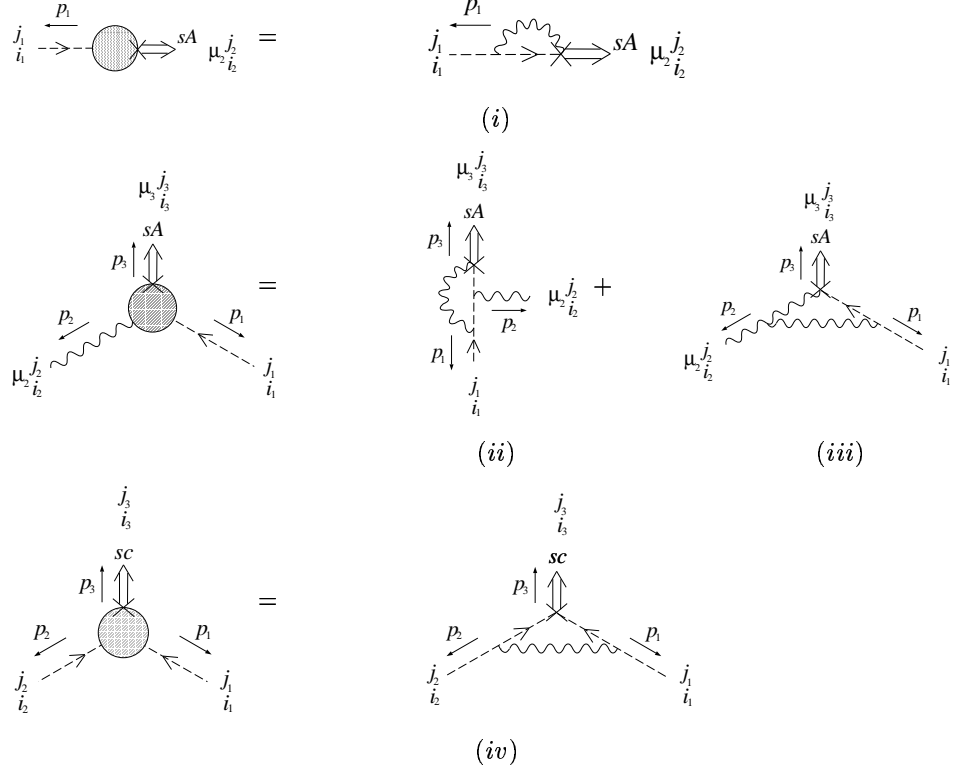


Figura 18: Diagramas 1PI de Feynman divergentes ultravioleta con campos externos.

Con campos externos

Los diagramas que contribuyen al nivel de 1 “loop” se muestran en la figura 18.

Los resultados son:

$$\begin{aligned}
 (i) &= -i \left(\frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 T_R \left(1 - \frac{\lambda' - 1}{2} \right) N \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_1} p_1 \mu_2, \\
 (ii) &= -\frac{i}{4} \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 T_R (1 + (\lambda' - 1)) \times \\
 &\quad N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] g_{\mu_2 \mu_3}, \\
 (iii) &= -\frac{3i}{4} \left(\frac{2}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 T_R (1 + (\lambda' - 1)) \times \\
 &\quad N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right] g_{\mu_2 \mu_3}, \\
 (iv) &= i \left(\frac{1}{(4\pi)^2 \varepsilon} \right) g^2 T_R (1 + (\lambda' - 1)) \times \\
 &\quad N \left[e^{-i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_2} \delta_{i_2}^{j_3} \delta_{i_3}^{j_1} - e^{i\omega(p_1, p_2)} \delta_{i_1}^{j_3} \delta_{i_2}^{j_1} \delta_{i_3}^{j_2} \right]. \tag{D.9}
 \end{aligned}$$

Apéndice E.

Integrales de la divergencia IR en NCYM U(N)

Para obtener los resultados de las siguientes integrales, se han introducido los parámetros de Schwinger en la forma habitual, se ha rotado al espacio euclídeo, se han calculado las integrales gaussianas correspondientes y se ha realizado la aproximación de considerar sólo los términos divergentes cuadráticos y lineales en $\theta \rightarrow 0$.

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\tilde{p}k}}{k^2} \approx \frac{-i}{4\pi^2 p \circ p}, \quad (\text{E.1})$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\tilde{p}k} k^\mu}{k^2 (k+p)^2} \approx \frac{-i}{16\pi^2} \frac{2\tilde{p}^\mu}{p \circ p} \quad (\text{E.2})$$

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\tilde{p}k} k^\mu k^\nu}{k^2 (k+p)^2} \approx \frac{-i}{16\pi^2} \left\{ \frac{2g^{\mu\nu}}{p \circ p} + \frac{4\tilde{p}^\mu \tilde{p}^\nu}{(p \circ p)^2} - i \frac{\tilde{p}^\mu p^\nu + \tilde{p}^\nu p^\mu}{p \circ p} \right\} \quad (\text{E.3})$$

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k_{\mu_1} k_{\mu_2} k_{\mu_3} e^{i k \cdot \tilde{p}}}{k^2 (k + \ell_1)^2 (q + \ell_2)^2} &\approx \frac{-1}{32\pi^2 \tilde{p}^2} \\ &\times \left[g_{\mu_1 \mu_2} \tilde{p}_{\mu_3} + g_{\mu_2 \mu_3} \tilde{p}_{\mu_1} + g_{\mu_1 \mu_3} \tilde{p}_{\mu_2} + 2 \frac{\tilde{p}_{\mu_1} \tilde{p}_{\mu_2} \tilde{p}_{\mu_3}}{p \circ p} \right], \end{aligned} \quad (\text{E.4})$$

donde $p \circ p \equiv -\tilde{p}^2$ y \approx quiere decir en el límite cuando $\theta \rightarrow 0$ despreciando las divergencias logarítmicas.

Artículos publicados del doctorando

- i)* C. P. Martín and D. Sánchez Ruiz, *The one-loop UV divergent structure of $U(1)$ Yang-Mills theory on noncommutative \mathbb{R}^4* , Phys. Rev. Lett. **83**, 476-479 (1999) [arXiv:hep-th/9903077].
- ii)* C. P. Martín and D. Sánchez Ruiz, *Action principles, restoration of BRS symmetry and the renormalization group equation for chiral non-Abelian gauge theories in dimensional renormalization with a non-anticommuting γ_5* , Nucl. Phys. B **572**, 387-477 (2000) [arXiv:hep-th/9905076].
- iii)* C. P. Martín and D. Sánchez Ruiz, *The BRS invariance of noncommutative $U(N)$ Yang-Mills theory at the one-loop level*, Nucl. Phys. B **598**, 348-370 (2001) [arXiv:hep-th/0012024].
- iv)* D. Sánchez Ruiz, *BRS symmetry restoration of chiral Abelian Higgs-Kibble theory in dimensional renormalization with a non-anticommuting gamma(5)*, Phys. Rev. D **68**, 025009 (2003) (23 páginas) [arXiv:hep-th/0209023].

REFERENCIAS

- [1] C. G. Bollini and J. J. Giambiagi, *Lowest Order Divergent Graphs In Nu-Dimensional Space*, Phys. Lett. B **40**, 566 (1972).
- [2] G. 't Hooft and M. J. Veltman, *Regularization And Renormalization Of Gauge Fields*, Nucl. Phys. B **44**, 189 (1972).
- [3] J. F. Ashmore, *A Method Of Gauge Invariant Regularization*, Lett. Nuovo Cim. **4**, 289 (1972).
- [4] G. M. Cicuta and E. Montaldi, *Analytic Renormalization Via Continuous Space Dimension*, Lett. Nuovo Cim. **4** (1972) 329.
- [5] G. 't Hooft, *An Algorithm For The Poles At Dimension Four In The Dimensional Regularization Procedure*, Nucl. Phys. B **62**, 444 (1973).
- [6] F. V. Tkachov, *A Theorem On Analytical Calculability Of Four Loop Renormalization Group Functions*, Phys. Lett. B **100**, 65 (1981).
- [7] J. M. Campbell, E. W. Glover and D. J. Miller, *One-loop tensor integrals in dimensional regularisation*, Nucl. Phys. B **498**, 397 (1997) [arXiv:hep-ph/9612413].
- [8] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, *Two Loop Renormalization Group Equations In A General Quantum Field Theory. 1. Wave Function Renormalization*, Nucl. Phys. B **222**, 83 (1983).
- [9] M. E. Machacek and M. T. Vaughn, *Two Loop Renormalization Group Equations In A General Quantum Field Theory. 2. Yukawa Couplings*, Nucl. Phys. B **236**, 221 (1984).
- [10] B. A. Kniehl, *Status of higher order corrections in the standard electroweak theory*, Int. J. Mod. Phys. A **10**, 443 (1995) [arXiv:hep-ph/9410330].
- [11] T. van Ritbergen, J. A. Vermaseren and S. A. Larin, *The four-loop beta function in quantum chromodynamics*, Phys. Lett. B **400**, 379 (1997) [arXiv:hep-ph/9701390].
- [12] P. Breitenlohner and D. Maison, *Dimensional Renormalization And The Action Principle*, Commun. Math. Phys. **52**, 11 (1977).
- [13] P. Breitenlohner and D. Maison, *Dimensionally Renormalized Green's Functions For Theories With Massless Particles. 1*, Commun. Math. Phys. **52**, 39 (1977).

- [14] P. Breitenlohner and D. Maison, *Dimensionally Renormalized Green's Functions For Theories With Massless Particles. 2*, Commun. Math. Phys. **52**, 55 (1977).
- [15] L. Alvarez-Gaume and M. A. Vazquez-Mozo, *General properties of noncommutative field theories*, Nucl. Phys. B **668**, 293 (2003) [arXiv:hep-th/0305093].
- [16] L. Alvarez-Gaume and M. A. Vazquez-Mozo, *Comments on noncommutative field theories*, arXiv:hep-th/0311244.
- [17] O. Piguet and A. Rouet, *Symmetries In Perturbative Quantum Field Theory*, Phys. Rept. **76**, 1 (1981).
- [18] O. Piguet and S. P. Sorella, *Algebraic Renormalization: Perturbative Renormalization, Symmetries And Anomalies*, Lect. Notes Phys. **M28**, 1 (1995).
- [19] C. P. Martín and D. Sánchez Ruiz, *Action principles, restoration of BRS symmetry and the renormalization group equation for chiral non-Abelian gauge theories in dimensional renormalization with a non-anticommuting γ_5* , Nucl. Phys. B **572**, 387 (2000) [arXiv:hep-th/9905076].
- [20] D. Sánchez Ruiz, *BRS symmetry restoration of chiral Abelian Higgs-Kibble theory in dimensional renormalization with a non-anticommuting gamma(5)*, Phys. Rev. D **68**, 025009 (2003) [arXiv:hep-th/0209023].
- [21] C. P. Martín and D. Sánchez Ruiz, *The BRS invariance of noncommutative $U(N)$ Yang-Mills theory at the one-loop level*, Nucl. Phys. B **598**, 348 (2001) [arXiv:hep-th/0012024].
- [22] C. P. Martín and D. Sánchez Ruiz, *The one-loop UV divergent structure of $U(1)$ Yang-Mills theory on noncommutative \mathbb{R}^4* , Phys. Rev. Lett. **83**, 476 (1999) [arXiv:hep-th/9903077].
- [23] H. Epstein and V. Glaser, *The Role Of Locality In Perturbation Theory*, Annales Poincare Phys. Theor. A **19**, 211 (1973).
- [24] K. Hepp, *Théorie de la Renormalisation*, Lectures Notes in Physics, **vol.2**, Springer-Verlag (1980).
- [25] F. J. Dyson, *The S Matrix In Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **75**, 1736 (1949).
- [26] S. Weinberg, *High-Energy Behavior In Quantum Field Theory*, Phys. Rev. **118**, 838 (1960).
- [27] Y. Hahn and W. Zimmermann, *An Elementary Proof of Dyson's Power Counting Theorem*, Commun. Math. Phys. **10**, 330 (1968).
- [28] W. Zimmermann, *The Power Counting Theorem for Minkowski Metric*, Commun. Math. Phys. **11**, 1 (1968).
- [29] Y. M. Lam, *Perturbation Lagrangian Theory For Scalar Fields: Ward-Takahasi Identity And Current Algebra*, Phys. Rev. D **6**, 2145 (1972).

- [30] Y. M. Lam, *Perturbation Lagrangian Theory For Dirac Fields - Ward-Takahashi Identity And Current Algebra*, Phys. Rev. D **6**, 2161 (1972).
- [31] Y. M. Lam, *Equivalence Theorem On Bogolyubov-Parasiuk-Hepp-Zimmermann Renormalized Lagrangian Field Theories*, Phys. Rev. D **7**, 2943 (1973).
- [32] J. H. Lowenstein, *Differential Vertex Operations In Lagrangian Field Theory*, Commun. Math. Phys. **24**, 1 (1971).
- [33] N. N. Bogoliubov and O. S. Parasiuk, *On The Multiplication Of The Causal Function In The Quantum Theory Of Fields*, Acta Math. **97**, 227 (1957).
- [34] K. Hepp, *Proof Of The Bogolyubov-Parasiuk Theorem On Renormalization*, Commun. Math. Phys. **2**, 301 (1966).
- [35] W. Zimmermann, *Convergence Of Bogolyubov's Method Of Renormalization In Momentum Space*, Commun. Math. Phys. **15** (1969) 208 [Lect. Notes Phys. **558** (2000) 217].
- [36] J. H. Lowenstein, *Convergence Theorems For Renormalized Feynman Integrals With Zero - Mass Propagators*, Commun. Math. Phys. **47**, 53 (1976).
- [37] J. H. Lowenstein and E. R. Speer, *Distributional Limits Of Renormalized Feynman Integrals With Zero - Mass Denominators*, Commun. Math. Phys. **47**, 43 (1976).
- [38] J. H. Lowenstein and W. Zimmermann, *The Power Counting Theorem For Feynman Integrals With Massless Propagators*, Commun. Math. Phys. **44**, 73 (1975) [Lect. Notes Phys. **558**, 310 (2000)].
- [39] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *The Abelian Higgs-Kibble Model. Unitarity Of The S Operator*, Phys. Lett. B **52**, 344 (1974).
- [40] C. Becchi, A. Rouet and R. Stora, *Renormalization Of Gauge Theories*, Annals Phys. **98**, 287 (1976).
- [41] J. C. Ward, *An Identity In Quantum Electrodynamics*, Phys. Rev. **78**, 182 (1950).
- [42] A. A. Slavnov, *Ward Identities In Gauge Theories*, Theor. Math. Phys. **10**, 99 (1972) [Teor. Mat. Fiz. **10**, 153 (1972)]. (A este artículo no se ha tenido acceso; se incluye por razones históricas).
- [43] J. C. Taylor, *Ward Identities And Charge Renormalization Of The Yang-Mills Field*, Nucl. Phys. B **33**, 436 (1971).
- [44] J. Wess and B. Zumino, *Consequences Of Anomalous Ward Identities*, Phys. Lett. B **37**, 95 (1971).
- [45] F. Brandt, *Local BRST Cohomology and Covariance*, Commun. Math. Phys. **190**, 459 (1997) [arXiv:hep-th/9604025].
- [46] G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, *Local BRST cohomology in gauge theories*, Phys. Rept. **338**, 439 (2000) [arXiv:hep-th/0002245].

- [47] G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, *Local Brst Cohomology In The Antifield Formalism. II. Application To Yang-Mills Theory*, Commun. Math. Phys. **174**, 93 (1995) [arXiv:hep-th/9405194].
- [48] G. Barnich, F. Brandt and M. Henneaux, *Local BRST Cohomology In The Antifield Formalism. 1. General Theorems*, Commun. Math. Phys. **174**, 57 (1995) [arXiv:hep-th/9405109].
- [49] G. Barnich and M. Henneaux, *Renormalization Of Gauge Invariant Operators And Anomalies In Yang-Mills Theory*, Phys. Rev. Lett. **72**, 1588 (1994) [arXiv:hep-th/9312206].
- [50] F. Brandt, *Extended BRST cohomology, consistent deformations and anomalies of four-dimensional supersymmetric gauge theories*, arXiv:hep-th/0212070.
- [51] G. Bonneau, *Some Fundamental But Elementary Facts On Renormalization And Regularization: A Critical Review Of The Eighties*, Int. J. Mod. Phys. A **5**, 3831 (1990).
- [52] S. L. Adler, *Axial Vector Vertex In Spinor Electrodynamics*, Phys. Rev. **177**, 2426 (1969).
- [53] J. S. Bell and R. Jackiw, *A Pcac Puzzle: $\pi^0 \rightarrow \text{Gamma Gamma}$ In The Sigma Model*, Nuovo Cim. A **60**, 47 (1969).
- [54] W. A. Bardeen, *Anomalous Ward Identities In Spinor Field Theories*, Phys. Rev. **184**, 1848 (1969).
- [55] R. Ferrari and P. A. Grassi, *Constructive algebraic renormalization of the Abelian Higgs-Kibble model*, Phys. Rev. D **60**, 065010 (1999) [arXiv:hep-th/9807191].
- [56] P. A. Grassi, T. Hurth and M. Steinhauser, *Practical algebraic renormalization*, Annals Phys. **288**, 197 (2001) [arXiv:hep-ph/9907426].
- [57] P. A. Grassi, T. Hurth and M. Steinhauser, *Non-invariant two-loop counterterms for the three-gauge-boson vertices*, JHEP **0011**, 037 (2000) [arXiv:hep-ph/0011067].
- [58] P. A. Grassi, T. Hurth and M. Steinhauser, *The algebraic method*, Nucl. Phys. B **610**, 215 (2001) [arXiv:hep-ph/0102005].
- [59] P. A. Grassi and T. Hurth, *On the two-loop electroweak amplitude of the muon decay*, in *Proc. of the 5th International Symposium on Radiative Corrections (RADCOR 2000)* ed. Howard E. Haber, arXiv:hep-ph/0101183.
- [60] A. Quadri, *Slavnov-Taylor parameterization for the quantum restoration of BRST symmetries in anomaly-free gauge theories*, JHEP **0304**, 017 (2003) [arXiv:hep-th/0301211].
- [61] C. G. Bollini, J. J. Giambiagi and A. Gonz  les Domínguez, *Analytic Regularization and the Divergences of Quantum Field Theories*, Nuovo Cim. **31**, 550 (1964).
- [62] D. A. Akyeampong and R. Delbourgo, *Dimensional Regularization, Abnormal Amplitudes And Anomalies*, Nuovo Cim. A **17**, 578 (1973).

- [63] D. A. Akyeampong and R. Delbourgo, *Dimensional Regularization And Pcac*, Nuovo Cim. A **18**, 94 (1973).
- [64] D. A. Akyeampong and R. Delbourgo, *Anomalies Via Dimensional Regularization*, Nuovo Cim. A **19**, 219 (1974).
- [65] W. A. Bardeen, R. Gastmans and B. Lautrup, *Static Quantities In Weinberg's Model Of Weak And Electromagnetic Interactions*, Nucl. Phys. B **46**, 319 (1972).
- [66] M. S. Chanowitz, M. Furman and I. Hinchliffe, *The Axial Current In Dimensional Regularization*, Nucl. Phys. B **159**, 225 (1979).
- [67] J. G. Korner and G. Schuler, *Complete Amplitude And Cross-Section Structure Of One Loop Contributions To $E^+ E^- \rightarrow Q \text{ Anti-}Q G$* , Z. Phys. C **26**, 559 (1985).
- [68] P. B. Arnold and M. H. Reno, *The Complete Computation Of High $P(T)$ W And Z Production In 2nd Order QCD*, Nucl. Phys. B **319**, 37 (1989) [Erratum-ibid. B **330**, 284 (1990)].
- [69] I. Antoniadis, *On The Spontaneous Breaking Of Chiral Symmetry In QCD*, Phys. Lett. B **84**, 223 (1979).
- [70] T. L. Trueman, *Chiral Symmetry In Perturbative QCD*, Phys. Lett. B **88**, 331 (1979).
- [71] S. Gottlieb and J. T. Donohue, *The Axial Vector Current And Dimensional Regularization*, Phys. Rev. D **20**, 3378 (1979).
- [72] D. R. Jones and J. P. Leveille, *Dimensional Regularization And The Two Loop Axial Anomaly In Abelian, Nonabelian And Supersymmetric Gauge Theories*, Nucl. Phys. B **206**, 473 (1982) [Erratum-ibid. B **222**, 517 (1983)].
- [73] B. A. Ovrut, *Axial Vector Ward Identities And Dimensional Regularization*, Nucl. Phys. B **213**, 241 (1983).
- [74] M. A. Rego Monteiro, *Axial Anomalies In any Dimension With Dimensional Regularization*, Lett. Nuovo Cim. **40**, 201 (1984).
- [75] J. G. Korner, G. Schuler, G. Kramer and B. Lampe, *Gamma(5) And Infrared Dimensional Regularization*, Phys. Lett. B **164**, 136 (1985).
- [76] J. G. Korner, G. Schuler, G. Kramer and B. Lampe, *Calculation Of The $O(\alpha_s^2)$ Parity Violating Structure Functions In $E^+ E^- \rightarrow Q \text{ Anti-}Q G$* , Z. Phys. C **32**, 181 (1986).
- [77] R. J. Gonsalves, J. Pawlowski and C. F. Wai, *QCD Radiative Corrections To Electroweak Boson Production At Large Transverse Momentum In Hadron Collisions*, Phys. Rev. D **40**, 2245 (1989).
- [78] S. G. Gorishnii and S. A. Larin, *QCD Corrections To The Parton Model Rules For Structure Functions Of Deep Inelastic Scattering*, Phys. Lett. B **172**, 109 (1986).

- [79] S. A. Larin and J. A. Vermaseren, *The α - S^{**3} Corrections To The Bjorken Sum Rule For Polarized Electroproduction And To The Gross-Llewellyn Smith Sum Rule*, Phys. Lett. B **259**, 345 (1991).
- [80] S. A. Larin, *The Renormalization Of The Axial Anomaly In Dimensional Regularization*, Phys. Lett. B **303**, 113 (1993) [arXiv:hep-ph/9302240].
- [81] R. J. Gonsalves, C. M. Hung and J. Pawlowski, *Heavy quark triangle diagram contributions to Z boson production in hadron collisions*, Phys. Rev. D **46**, 4930 (1992).
- [82] T. L. Trueman, *Spurious anomalies in dimensional renormalization*, Z. Phys. C **69**, 525 (1996) [arXiv:hep-ph/9504315].
- [83] F. Ardalan and N. Sadooghi, *Axial anomaly in non-commutative QED on R^{**4}* , Int. J. Mod. Phys. A **16**, 3151 (2001) [arXiv:hep-th/0002143].
- [84] C. P. Martin, *The UV and IR origin of non-Abelian chiral gauge anomalies on noncommutative Minkowski space-time*, J. Phys. A **34**, 9037 (2001) [arXiv:hep-th/0008126].
- [85] F. Ardalan and N. Sadooghi, *Anomaly and nonplanar diagrams in noncommutative gauge theories*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 123 (2002) [arXiv:hep-th/0009233].
- [86] C. Schubert, *The Yukawa Model As An Example For Dimensional Renormalization With Gamma (5)*, Nucl. Phys. B **323**, 478 (1989).
- [87] A. J. Buras and P. H. Weisz, *QCD Nonleading Corrections To Weak Decays In Dimensional Regularization And 'T Hooft-Veltman Schemes*, Nucl. Phys. B **333**, 66 (1990).
- [88] A. J. Buras, M. Jamin, M. E. Lautenbacher and P. H. Weisz, *Effective Hamiltonians for Delta S = 1 and Delta B = 1 nonleptonic decays beyond the leading logarithmic approximation*, Nucl. Phys. B **370**, 69 (1992) [Addendum-ibid. B **375**, 501 (1992)].
- [89] G. Buchalla, *O (α -s) QCD corrections to charm quark decay in dimensional regularization with nonanticommuting gamma-5*, Nucl. Phys. B **391**, 501 (1993).
- [90] A. J. Buras, M. Jamin, M. E. Lautenbacher and P. H. Weisz, *Two loop anomalous dimension matrix for Delta S = 1 weak nonleptonic decays. 1. O(α -s **2)*, Nucl. Phys. B **400**, 37 (1993) [arXiv:hep-ph/9211304].
- [91] M. Ciuchini, E. Franco, G. Martinelli and L. Reina, *epsilon-prime / epsilon at the Next-to-leading order in QCD and QED*, Phys. Lett. B **301**, 263 (1993) [arXiv:hep-ph/9212203].
- [92] M. Ciuchini, E. Franco, G. Martinelli and L. Reina, *The Delta S = 1 effective Hamiltonian including next-to-leading order QCD and QED corrections*, Nucl. Phys. B **415**, 403 (1994) [arXiv:hep-ph/9304257].
- [93] M. Ciuchini, E. Franco, G. Martinelli, L. Reina and L. Silvestrini, *Scheme independence of the effective Hamiltonian for $b \rightarrow s$ gamma and $b \rightarrow s$ g decays*, Phys. Lett. B **316**,

- 127 (1993) [arXiv:hep-ph/9307364].
- [94] M. Ciuchini, E. Franco, L. Reina and L. Silvestrini, *Leading order QCD corrections to $b \rightarrow s$ gamma and $b \rightarrow s g$ decays in three regularization schemes*, Nucl. Phys. B **421**, 41 (1994) [arXiv:hep-ph/9311357].
- [95] V. Ravindran, J. Smith and W. L. van Neerven, *NNLO corrections to massive lepton-pair production in longitudinally polarized proton proton collisions*, arXiv:hep-ph/0311304.
- [96] J. G. Korner, N. Nasrallah and K. Schilcher, *Evaluation Of The Flavor Changing Vertex $B \rightarrow S H$ Using The Breitenlohner-Maison-'t Hooft-Veltman Gamma(5) Scheme*, Phys. Rev. D **41**, 888 (1990).
- [97] A. Barroso, M. A. Doncheski, H. Grotch, J. G. Korner and K. Schilcher, *Problems The BM Gamma(5) Scheme In Flavor Changing Neutral Currents*, Phys. Lett. B **261**, 123 (1991).
- [98] R. Ferrari, A. Le Yaouanc, L. Oliver and J. C. Raynal, *Gauge invariance and dimensional regularization with gamma(5) in flavor changing neutral processes*, Phys. Rev. D **52**, 3036 (1995).
- [99] A. Freitas, W. Hollik, W. Walter and G. Weiglein, *Complete fermionic two-loop results for the $M(W)$ - $M(Z)$ interdependence*, Phys. Lett. B **495**, 338 (2000) [arXiv:hep-ph/0007091].
- [100] A. Freitas, S. Heinemeyer, W. Hollik, W. Walter and G. Weiglein, *Calculation of fermionic two-loop contributions to muon decay*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **89**, 82 (2000) [arXiv:hep-ph/0007129].
- [101] G. Bonneau, *Consistency In Dimensional Regularization With Gamma(5)*, Phys. Lett. B **96**, 147 (1980).
- [102] J. C. Collins, *Renormalization*, Cambridge University Press (1984).
- [103] K. G. Wilson, *Quantum Field Theory Models In Less Than Four-Dimensions*, Phys. Rev. D **7**, 2911 (1973).
- [104] J. C. Collins, *Structure Of Counterterms In Dimensional Regularization*, Nucl. Phys. B **80**, 341 (1974).
- [105] W. E. Caswell and A. D. Kennedy, *A Simple Approach To Renormalization Theory*, Phys. Rev. D **25**, 392 (1982).
- [106] G. Bonneau, *Zimmermann Identities And Renormalization Group Equation In Dimensional Renormalization*, Nucl. Phys. B **167**, 261 (1980).
- [107] G. Bonneau, *Trace And Axial Anomalies In Dimensional Renormalization Through Zimmermann Like Identities*, Nucl. Phys. B **171**, 477 (1980).
- [108] G. Bonneau, *Preserving Canonical Ward Identities In Dimensional Regularization With A Nonanticommuting Gamma(5)*, Nucl. Phys. B **177**, 523 (1981).

- [109] W. Zimmermann, *Normal Products And The Short Distance Expansion In The Perturbation Theory Of Renormalizable Interactions*, Annals Phys. **77** (1973) 570 [Lect. Notes Phys. **558** (2000) 278].
- [110] D. J. Gross and R. Jackiw, *Effect Of Anomalies On Quasirenormalizable Theories*, Phys. Rev. D **6**, 477 (1972).
- [111] M. Bos, *An Example Of Dimensional Regularization With Antisymmetric Tensors*, Annals Phys. **181**, 177 (1988).
- [112] H. Osborn, *General Bosonic Sigma Models And String Effective Actions*, Annals Phys. **200**, 1 (1990).
- [113] I. Jack, D. R. Jones and K. L. Roberts, *Equivalence of dimensional reduction and dimensional regularization*, Z. Phys. C **63**, 151 (1994) [arXiv:hep-ph/9401349].
- [114] K. G. Wilson and J. B. Kogut, *The Renormalization Group And The Epsilon Expansion*, Phys. Rept. **12**, 75 (1974).
- [115] G. 't Hooft, *Dimensional Regularization And The Renormalization Group*, Nucl. Phys. B **61** (1973) 455.
- [116] P. Pascual and R. Tarrach, *QCD: Renormalization For The Practitioner*, Lect. Notes Phys. **194** (1984) 1.
- [117] Carta de Heisenberg a Peierls de 1930 en *Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence, Vol. II*, p.15. y carta de Pauli a Oppenheimer de 1946 en *Wolfgang Pauli, Scientific Correspondence, Vol. III*, p.380. Ed. Karl von Meyenn, Springer-Verlag (1985), según las correspondientes citas en X. Calmet, M. Wohlgenannt, [arXiv:hep-ph/0305027]; W. Heisenberg (1954), en H. P. Dürr, *Werner Heisenberg und die Physik unserer Zeit*, S. 299, Fr. Vieweg u. Sohn, Braunschweig, (1961) y H. Rampacher, H Stumpf and F. Wagner Fortsch. Phys. **13**, 385 (1965) según las correspondientes citas en M. Chaichian, K. Nishijima and A. Tureanu, [arXiv:hep-th/0209008], haciendo mención a una investigación de J. Wess.
- [118] H. S. Snyder, *Quantized Space-Time*, Phys. Rev. **71**, 38 (1947).
- [119] H. S. Snyder, *The electromagnetic Field in Quantized Space-Time*, Phys. Rev. **72**, 68 (1947).
- [120] C. N. Yang, *On Quantized Space-Time*, Phys. Rev. **72**, 874 (1947).
- [121] H. Grosse, C. Klimcik and P. Presnajder, *Finite quantum field theory in noncommutative geometry*, Commun. Math. Phys. **180**, 429 (1996) [arXiv:hep-th/9602115], y sus referencias.
- [122] E. Hawkins, *Noncommutative regularization for the practical man*, arXiv:hep-th/9908052.
- [123] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *Space-time quantization induced by classical gravity*, Phys. Lett. B **331**, 39 (1994).

- [124] S. Doplicher, K. Fredenhagen and J. E. Roberts, *The Quantum Structure Of Space-Time At The Planck Scale And Quantum Fields*, Commun. Math. Phys. **172**, 187 (1995).
- [125] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press (1994).
- [126] A. Connes, *Noncommutative Differential Geometry*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **62**, 257 (1986).
- [127] J. C. Varilly and J. M. Gracia-Bondia, *Connes' Noncommutative Differential Geometry And The Standard Model*, J. Geom. Phys. **12**, 223 (1993).
- [128] G. Landi, *An Introduction to Noncommutative Spaces and their Geometries*, Springer-Verlag (1997).
- [129] J. M. Gracia-Bondía, J. C. Várilly y H. Figueroa, *Elements of Noncommutative Geometry*, Birkuser, (2000).
- [130] A. Connes and M. A. Rieffel, *Yang-Mills For Noncommutative Two-Tori*, Contemp. Math. **62**, 237 (1987).
- [131] M. Spera, *A symplectic approach to Yang-Mills theory for noncommutative tori*, Can. J. Math. **44**, 368 (1992)
- [132] A. Connes and J. Lott, *Particle Models And Noncommutative Geometry (Expanded Version)*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **18B**, 29 (1991).
- [133] C. P. Martin, J. M. Gracia-Bondia and J. C. Varilly, *The standard model as a noncommutative geometry: The low-energy regime*, Phys. Rept. **294**, 363 (1998) [arXiv:hep-th/9605001].
- [134] E. Witten, *Noncommutative Geometry And String Field Theory*, Nucl. Phys. B **268**, 253 (1986).
- [135] P. M. Ho and Y. S. Wu, *Noncommutative geometry and D-branes*, Phys. Lett. B **398**, 52 (1997) [arXiv:hep-th/9611233].
- [136] M. Li and T. Yoneya, *D-particle dynamics and the space-time uncertainty relation*, Phys. Rev. Lett. **78**, 1219 (1997) [arXiv:hep-th/9611072].
- [137] A. Connes, M. R. Douglas and A. Schwarz, *Noncommutative geometry and matrix theory: Compactification on tori*, JHEP **9802**, 003 (1998) [arXiv:hep-th/9711162].
- [138] N. Seiberg and E. Witten, *String theory and noncommutative geometry*, JHEP **9909**, 032 (1999) [arXiv:hep-th/9908142], y sus referencias.
- [139] D. Bigatti and L. Susskind, *Magnetic fields, branes and noncommutative geometry*, Phys. Rev. D **62**, 066004 (2000) [arXiv:hep-th/9908056].
- [140] R. Jackiw, *Physical instances of noncommuting coordinates*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **108**, 30 (2002) [Phys. Part. Nucl. **33**, S6 (2002 LNPHA,616,294-304.2003)] [arXiv:hep-th/0110057].

- [141] H. Weyl, *Quantum Mechanics And Group Theory*, Z. Phys. **46**, 1 (1927).
- [142] M. Chaichian, A. Demichev and P. Presnajder, *Quantum field theory on noncommutative space-times and the persistence of ultraviolet divergences*, Nucl. Phys. B **567**, 360 (2000) [arXiv:hep-th/9812180].
- [143] R. J. Szabo, *Quantum field theory on noncommutative spaces*, Phys. Rept. **378**, 207 (2003) [arXiv:hep-th/0109162].
- [144] H. O. Girotti, *Noncommutative quantum field theories*, arXiv:hep-th/0301237.
- [145] H. J. Groenewold, *On The Principles Of Elementary Quantum Mechanics*, Physica **12**, 405 (1946). (No se tenido acceso a este artículo; se incluye aquí por su importancia histórica)
- [146] J. E. Moyal, *Quantum Mechanics As A Statistical Theory*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **45**, 99 (1949). (No se tenido acceso a este artículo; se incluye aquí por su importancia histórica)
- [147] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, *Deformation Theory And Quantization. 1. Deformations Of Symplectic Structures*, Annals Phys. **111**, 61 (1978).
- [148] O. Aharony, J. Gomis and T. Mehen, *On theories with light-like noncommutativity*, JHEP **0009**, 023 (2000) [arXiv:hep-th/0006236].
- [149] J. Gomis and T. Mehen, *Space-time noncommutative field theories and unitarity*, Nucl. Phys. B **591**, 265 (2000) [arXiv:hep-th/0005129].
- [150] L. Alvarez-Gaume, J. L. Barbon and R. Zwicky, *Remarks on time-space noncommutative field theories*, JHEP **0105**, 057 (2001) [arXiv:hep-th/0103069].
- [151] A. Bassetto, L. Griguolo, G. Nardelli and F. Vian, *On the unitarity of quantum gauge theories on noncommutative spaces*, JHEP **0107**, 008 (2001) [arXiv:hep-th/0105257].
- [152] C. S. Chu, J. Lukierski and W. J. Zakrzewski, *Hermitian analyticity, IR/UV mixing and unitarity of noncommutative field theories*, Nucl. Phys. B **632**, 219 (2002) [arXiv:hep-th/0201144].
- [153] R. G. Cai and N. Ohta, *Lorentz transformation and light-like noncommutative SYM*, JHEP **0010**, 036 (2000) [arXiv:hep-th/0008119].
- [154] M. Lubo, *Maximally localized states and causality in noncommutative quantum theories*, Phys. Rev. D **65**, 066003 (2002) [arXiv:hep-th/0106018].
- [155] M. Chaichian, K. Nishijima and A. Tureanu, *Spin-statistics and CPT theorems in noncommutative field theory*, arXiv:hep-th/0209008.
- [156] Y. Liao and K. Sibold, *Spectral representation and dispersion relations in field theory on noncommutative space*, Phys. Lett. B **549**, 352 (2002) [arXiv:hep-th/0209221].

- [157] N. Seiberg, L. Susskind and N. Toumbas, *Space/time non-commutativity and causality*, JHEP **0006**, 044 (2000) [arXiv:hep-th/0005015].
- [158] G. 't Hooft, *A Planar Diagram Theory For Strong Interactions*, Nucl. Phys. B **72**, 461 (1974).
- [159] E. Brezin, C. Itzykson, G. Parisi and J. B. Zuber, *Planar Diagrams*, Commun. Math. Phys. **59**, 35 (1978).
- [160] T. Filk, *Divergencies In A Field Theory On Quantum Space*, Phys. Lett. B **376**, 53 (1996).
- [161] I. Y. Aref'eva, D. M. Belov and A. S. Koshelev, *Two-loop diagrams in noncommutative $\phi^4(4)$ theory*, Phys. Lett. B **476**, 431 (2000) [arXiv:hep-th/9912075].
- [162] L. Bonora and M. Salizzoni, *Renormalization of noncommutative $U(N)$ gauge theories*, v. 1 [http://arxiv.org/abs/hep-th/0011088v1].
- [163] L. Bonora and M. Salizzoni, *Renormalization of noncommutative $U(N)$ gauge theories*, Phys. Lett. B **504**, 80 (2001) [arXiv:hep-th/0011088].
- [164] I. Chepelev and R. Roiban, *Renormalization of quantum field theories on noncommutative R^{*d} . I: Scalars*, JHEP **0005**, 037 (2000) [arXiv:hep-th/9911098].
- [165] S. Minwalla, M. Van Raamsdonk and N. Seiberg, *Noncommutative perturbative dynamics*, JHEP **0002**, 020 (2000) [arXiv:hep-th/9912072].
- [166] I. Chepelev and R. Roiban, *Convergence theorem for non-commutative Feynman graphs and renormalization*, JHEP **0103**, 001 (2001) [arXiv:hep-th/0008090].
- [167] C. Becchi, S. Giusto and C. Imbimbo, *The renormalization of non-commutative field theories in the limit of large non-commutativity*, Nucl. Phys. B **664**, 371 (2003) [arXiv:hep-th/0304159].
- [168] A. Armoni, *Comments on perturbative dynamics of non-commutative Yang-Mills theory*, Nucl. Phys. B **593**, 229 (2001) [arXiv:hep-th/0005208].
- [169] J. C. Varilly and J. M. Gracia-Bondia, *On the ultraviolet behaviour of quantum fields over noncommutative manifolds*, Int. J. Mod. Phys. A **14**, 1305 (1999) [arXiv:hep-th/9804001].
- [170] T. Krajewski and R. Wulkenhaar, *Perturbative quantum gauge fields on the noncommutative torus*, Int. J. Mod. Phys. A **15**, 1011 (2000) [arXiv:hep-th/9903187].
- [171] M. M. Sheikh-Jabbari, *Renormalizability of the supersymmetric Yang-Mills theories on the noncommutative torus*, JHEP **9906**, 015 (1999) [arXiv:hep-th/9903107].
- [172] A. Armoni, *A note on non-commutative orbifold field theories*, JHEP **0003**, 033 (2000) [arXiv:hep-th/9910031].
- [173] H. B. Benaoum, *Perturbative BF-Yang-Mills theory on noncommutative R^{*4}* , Nucl. Phys. B **585**, 554 (2000) [arXiv:hep-th/9912036].

- [174] M. Hayakawa, *Perturbative analysis on infrared aspects of noncommutative QED on $R^{**}4$* , Phys. Lett. B **478**, 394 (2000) [arXiv:hep-th/9912094].
- [175] M. Hayakawa, *Perturbative analysis on infrared and ultraviolet aspects of noncommutative QED on $R^{**}4$* , arXiv:hep-th/9912167.
- [176] H. Grosse, T. Krajewski and R. Wulkenhaar, *Renormalization of noncommutative Yang-Mills theories: A simple example*, arXiv:hep-th/0001182.
- [177] J. M. Gracia-Bondia and C. P. Martin, *Chiral gauge anomalies on noncommutative $R^{**}4$* , Phys. Lett. B **479**, 321 (2000) [arXiv:hep-th/0002171].
- [178] L. Bonora, M. Schnabl and A. Tomasiello, *A note on consistent anomalies in noncommutative YM theories*, Phys. Lett. B **485**, 311 (2000) [arXiv:hep-th/0002210].
- [179] E. F. Moreno and F. A. Schaposnik, *The Wess-Zumino-Witten term in noncommutative two-dimensional fermion models*, JHEP **0003**, 032 (2000) [arXiv:hep-th/0002236].
- [180] B. A. Campbell and K. Kaminsky, *Noncommutative field theory and spontaneous symmetry breaking*, Nucl. Phys. B **581**, 240 (2000) [arXiv:hep-th/0003137].
- [181] K. Furuta and T. Inami, *Ultraviolet property of noncommutative Wess-Zumino-Witten model*, Mod. Phys. Lett. A **15**, 997 (2000) [arXiv:hep-th/0004024].
- [182] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *A consistent noncommutative field theory: The Wess-Zumino model*, Nucl. Phys. B **587**, 299 (2000) [arXiv:hep-th/0005272].
- [183] G. H. Chen and Y. S. Wu, *One-loop shift in noncommutative Chern-Simons coupling*, Nucl. Phys. B **593**, 562 (2001) [arXiv:hep-th/0006114].
- [184] A. A. Bichl, J. M. Grimstrup, H. Grosse, L. Popp, M. Schweda and R. Wulkenhaar, *The superfield formalism applied to the noncommutative Wess-Zumino model*, JHEP **0010**, 046 (2000) [arXiv:hep-th/0007050].
- [185] A. Micu and M. M. Sheikh Jabbari, *Noncommutative $\phi^{**}4$ theory at two loops*, JHEP **0101**, 025 (2001) [arXiv:hep-th/0008057].
- [186] I. F. Riad and M. M. Sheikh-Jabbari, *Noncommutative QED and anomalous dipole moments*, JHEP **0008**, 045 (2000) [arXiv:hep-th/0008132].
- [187] C. P. Martin and F. Ruiz Ruiz, *Paramagnetic dominance, the sign of the beta function and UV/IR mixing in non-commutative $U(1)$* , Nucl. Phys. B **597**, 197 (2001) [arXiv:hep-th/0007131].
- [188] W. H. Huang, *Two-loop effective potential in noncommutative scalar field theory*, Phys. Lett. B **496**, 206 (2000) [arXiv:hep-th/0009067].
- [189] E. T. Akhmedov, P. DeBoer and G. W. Semenoff, *Running couplings and triviality of field theories on non-commutative spaces*, Phys. Rev. D **64**, 065005 (2001) [arXiv:hep-th/0010003].

- [190] H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *The three-dimensional noncommutative nonlinear sigma model in superspace*, Phys. Lett. B **521**, 119 (2001) [arXiv:hep-th/0109222].
- [191] N. Grandi and G. A. Silva, *Chern-Simons action in noncommutative space*, Phys. Lett. B **507**, 345 (2001) [arXiv:hep-th/0010113].
- [192] M. Pernici, A. Santambrogio and D. Zanon, *The one-loop effective action of noncommutative $N = 4$ super Yang-Mills is gauge invariant*, Phys. Lett. B **504**, 131 (2001) [arXiv:hep-th/0011140].
- [193] V. V. Khoze and G. Travaglini, *Wilsonian effective actions and the IR/UV mixing in noncommutative gauge theories*, JHEP **0101**, 026 (2001) [arXiv:hep-th/0011218].
- [194] F. J. Petriello, *The Higgs mechanism in non-commutative gauge theories*, Nucl. Phys. B **601**, 169 (2001) [arXiv:hep-th/0101109].
- [195] B. A. Campbell and K. Kaminsky, *Noncommutative linear sigma models*, Nucl. Phys. B **606**, 613 (2001) [arXiv:hep-th/0102022].
- [196] F. Ruiz Ruiz, *UV/IR mixing and the Goldstone theorem in noncommutative field theory*, Nucl. Phys. B **637**, 143 (2002) [arXiv:hep-th/0202011].
- [197] t. B. Nguyen, *The one-loop QED in noncommutative space*, arXiv:hep-th/0301084.
- [198] I. Y. Aref'eva, D. M. Belov and A. S. Koshelev, *A note on UV/IR for noncommutative complex scalar field*, arXiv:hep-th/0001215.
- [199] A. Matusis, L. Susskind and N. Toumbas, *The IR/UV connection in the non-commutative gauge theories*, JHEP **0012**, 002 (2000) [arXiv:hep-th/0002075].
- [200] I. Y. Aref'eva, D. M. Belov, A. S. Koshelev and O. A. Rytchkov, *UV/IR mixing for noncommutative complex scalar field theory. II: Interaction with gauge fields*, Nucl. Phys. Proc. Suppl. **102**, 11 (2001) [arXiv:hep-th/0003176].
- [201] D. Zanon, *Noncommutative perturbation in superspace*, Phys. Lett. B **504**, 101 (2001) [arXiv:hep-th/0009196].
- [202] D. Zanon, *Noncommutative $N = 1,2$ super $U(N)$ Yang-Mills: UV/IR mixing and effective action results at one loop*, Phys. Lett. B **502**, 265 (2001) [arXiv:hep-th/0012009].
- [203] F. R. Ruiz, *Gauge-fixing independence of IR divergences in non-commutative $U(1)$, perturbative tachyonic instabilities and supersymmetry*, Phys. Lett. B **502**, 274 (2001) [arXiv:hep-th/0012171].
- [204] H. O. Girotti, M. Gomes, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *The noncommutative supersymmetric nonlinear sigma model*, Int. J. Mod. Phys. A **17**, 1503 (2002) [arXiv:hep-th/0102101].
- [205] I. L. Buchbinder, M. Gomes, A. Y. Petrov and V. O. Rivelles, *Superfield effective action*

- in the noncommutative Wess-Zumino model*, Phys. Lett. B **517**, 191 (2001) [arXiv:hep-th/0107022].
- [206] A. A. Bichl *et al.*, *Non-commutative $U(1)$ super-Yang-Mills theory: Perturbative self-energy corrections*, arXiv:hep-th/0203141.
- [207] A. F. Ferrari, H. O. Girotti, M. Gomes, A. Y. Petrov, A. A. Ribeiro, V. O. Rivelles and A. J. da Silva, *Superfield covariant analysis of the divergence structure of noncommutative supersymmetric $QED(4)$* , arXiv:hep-th/0309154.
- [208] C. S. Chu and P. M. Ho, *Noncommutative open string and D-brane*, Nucl. Phys. B **550**, 151 (1999) [arXiv:hep-th/9812219].
- [209] M. M. Sheikh-Jabbari, *Open strings in a B-field background as electric dipoles*, Phys. Lett. B **455**, 129 (1999) [arXiv:hep-th/9901080].
- [210] Z. Yin, Phys. Lett. B **466**, 234 (1999) [arXiv:hep-th/9908152].
- [211] L. Alvarez-Gaume and J. L. Barbon, *Non-linear vacuum phenomena in non-commutative QED* , Int. J. Mod. Phys. A **16**, 1123 (2001) [arXiv:hep-th/0006209].
- [212] L. Jiang and E. Nicholson, *Interacting dipoles from matrix formulation of noncommutative gauge theories*, Phys. Rev. D **65**, 105020 (2002) [arXiv:hep-th/0111145].
- [213] J. Gomis, K. Landsteiner and E. Lopez, *Non-relativistic non-commutative field theory and UV / IR mixing*, Phys. Rev. D **62**, 105006 (2000) [arXiv:hep-th/0004115].
- [214] J. Gomis, T. Mehen and M. B. Wise, *Quantum field theories with compact noncommutative extra dimensions*, JHEP **0008**, 029 (2000) [arXiv:hep-th/0006160].
- [215] J. Gomis, M. Kleban, T. Mehen, M. Rangamani and S. H. Shenker, *Noncommutative gauge dynamics from the string worldsheet*, JHEP **0008**, 011 (2000) [arXiv:hep-th/0003215].
- [216] K. Matsubara, *Restrictions on gauge groups in noncommutative gauge theory*, Phys. Lett. B **482**, 417 (2000) [arXiv:hep-th/0003294].

